

問題 3

三角形の内部に中心があり三辺すべてに接する円を三角形の内接円という。内接円の中心（内心）はこの三角形の3つの角の2等分線の交点である。（3つの角の2等分線が1点で交わることは説明なしで使ってよい。）

一般に $\triangle ABC$ に対して各辺の長さをそれぞれ $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ と表す。ここでは、 $\angle C = 90^\circ$ である直角三角形 $\triangle ABC$ について考える。

- (1) $\triangle ABC$ の内接円の半径 r を a , b , c を用いて表しなさい。
- (2) 三角形の内部に中心をもち、2辺 BC , BA にともに接する円を O_1 とする。円 O_1 の半径を r_1 とし円 O_1 の中心（中心も O_1 と表す）から辺 BC に引いた垂線の交点（垂線の足という）を H_1 とする。このとき、 BH_1 の長さが $\frac{c+a}{b}r_1$ となることを説明しなさい。
- (3) $\triangle ABC$ の内部に中心を持つ同じ半径 r の二つの円（辺 BC と辺 BA の両方に接する円 O_1 、辺 AC と AB の両方に接する円 O_2 ）があり二つの円は外接しているものとする。解答用紙の $\triangle ABC$ の図の中にこのような2つの円を描きなさい（free-handでよい）。また、このときの半径 r の値を a , b , c を用いて表しなさい。

ここからは、 $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$ の直角三角形 ABC （ $\angle C = 90^\circ$ ）について考える。

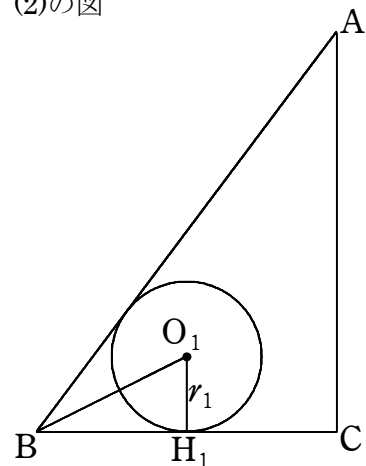
- (4) $\triangle ABC$ について辺 BC と辺 BA の両方に接する円 O_1 （半径 r_1 ）及び辺 AC と AB の両方に接する円 O_2 （半径 r_2 ）があり二つの円は外接しているとする。（ r_1 と r_2 の値は一致しているとは限らない。）このとき、 r_1 , r_2 の間に成り立つ式を書きなさい。
- (5) $\triangle ABC$ の辺 CB , CA の両辺に接する円 O （半径 r ）を定め、円 O と辺 BC と辺 BA に接する円 O_1 （半径 r_1 ）, 円 O と辺 AC と AB に接する円 O_2 （半径 r_2 ）を描く。ただしどの円も三角形の外部の点は通らないものとする。このとき、半径 r_1 と半径 r_2 の値をそれぞれ r を用いて表しなさい。

O, O_1, O_2 が外接するときこの3つの円はいずれも円の内部で三角形の2辺と接してお互いに外接する。一般にこのような円をマルファッチの円という。マルファッチは18・19世紀のイタリアの数学者だが、江戸時代の日本の和算家安島直円（あじまなおのぶ）はマルファッチより先にこの分野の研究を行い独自に結果を出している。

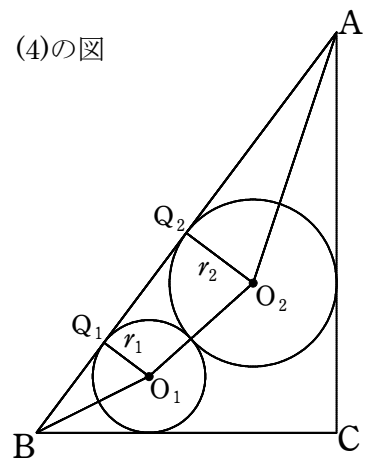
- (6) ここまでの結果を用いて、(4)(5)の条件のもとで、 O, O_1, O_2 がマルファッチの円になるときの r の値を求めなさい。

ヒント：(5)で得られた式を(4)の式に代入する。

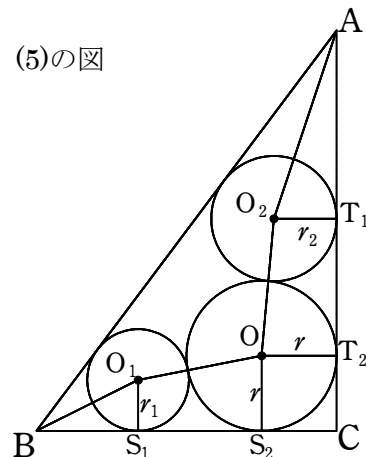
(2)の図



(4)の図



(5)の図



(6)の図

