

問題 4

$x > 0$ で定義された関数 $f(x)$ が次の条件を満たすとき、下の問いに答えよ。

- 条件 : (i) $f(x) > 0$, $f(1) = 1$
 (ii) $f(x+1) = xf(x)$
 (iii) $2 \leq x < y$ ならば, $f(x) < f(y)$

- (1) $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$, $f(6)$ の値をそれぞれ求めよ。
 (2) 自然数 n に対して, $f(n+1) = n!$ であることを示せ。
 (3) $f\left(\frac{1}{2}\right) = A$ とおく。自然数 n に対して,

$$f\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{2n-1}{2} \cdot \frac{2n-3}{2} \cdots \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} A$$

となることを示せ。

さらに, 関数 $f(x)$ は条件 : (iv) $\frac{f\left(x + \frac{1}{2}\right)}{f(x)} > \sqrt{x - \frac{1}{4}}$ ($x \geq 2$) を満たす。そのとき,

- (4) (3) と合わせて, 自然数 $n \geq 2$ に対して, 次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\begin{aligned} \frac{4n+1}{4(2n+1)} \cdot \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{(2n)^2}\right) &< \frac{1}{A^2} \\ &< \frac{2n-1}{4n-1} \cdot \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{(2n-2)^2}\right) \end{aligned}$$

実数 X に対して, 3 乗して X になる実数を $\sqrt[3]{X}$ (3 乗根 X と読む) で表すこととする。

さらに, 関数 $f(x)$ が条件 : (v) $\frac{f\left(x + \frac{1}{3}\right)}{f(x)} > \sqrt[3]{x - \frac{1}{3}}$ ($x \geq 2$) を満たす。そのとき,

- (5) $f\left(\frac{1}{3}\right) = B$, $f\left(\frac{2}{3}\right) = C$ とおく。自然数 $n \geq 2$ に対して,

$$\begin{aligned} \frac{n}{3(3n+1)} \cdot \left(1 - \frac{11}{3^3}\right) \left(1 - \frac{20}{6^3}\right) \cdots \left(1 - \frac{9n+2}{(3n)^3}\right) &< \frac{1}{B^3} \\ &< \frac{3n-2}{9(3n-1)} \cdot \left(1 - \frac{11}{3^3}\right) \left(1 - \frac{20}{6^3}\right) \cdots \left(1 - \frac{9(n-1)+2}{(3n-3)^3}\right) \end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned} \frac{2(3n+1)}{3(3n+2)} \cdot \left(1 - \frac{7}{3^3}\right) \left(1 - \frac{16}{6^3}\right) \cdots \left(1 - \frac{9n-2}{(3n)^3}\right) &< \frac{1}{C^3} \\ &< \frac{2(3n-1)}{9n} \cdot \left(1 - \frac{7}{3^3}\right) \left(1 - \frac{16}{6^3}\right) \cdots \left(1 - \frac{9(n-1)-2}{(3n-3)^3}\right) \end{aligned}$$

となることを示せ。