

第3問

$f(x)$ はすべての実数で定義された関数で、実数 x, y に対して

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + 2f(y) \quad \cdots (\ast)$$

を満たしている。次の問いに答えなさい。

- (1) $f(0)$ の値を求めなさい。
- (2) すべての実数 x に対して、 $f(-x) = f(x)$ を証明しなさい。
- (3) $f(2x), f\left(\frac{1}{3}x\right)$ を $f(x)$ で表しなさい。
- (4) 関数 $f(x)$ が x についての整式とするとき、関数 $f(x)$ の次数および関数 $f(x)$ を求めなさい。ただし、関数 $f(x)$ の次数は 0 ではない。
- (5) $g(x)$ はすべての実数で定義された関数で、 a, b は定数として、すべての実数 x, y に対して

$$g(x+ay) + g(x-ay) = 2bg(x) + 2bg(y) \quad \cdots (\ast\ast)$$

を満たしている。関数 $g(x)$ が x についての整式とするとき、関数 $g(x)$ を求めなさい。