

### 第3問

関数  $f(x)$  は、0 以外のすべての実数で定義された実数値関数であり、次の条件 I ~ III をみたす。

条件 I  $f(1) = 1$

II  $x > 0$  のとき、 $f(x) > 0$

III 0 以外の任意の実数  $x, y$  に対して、 $f(x+y)\left\{1 + f\left(\frac{x}{y}\right)\right\} = f(x)$

次の問いに答えなさい。

(1)  $f(2)$ ,  $f\left(\frac{1}{2}\right)$  の値を求めなさい。

(2)  $f(-1)$ ,  $f(-2)$ ,  $f\left(-\frac{1}{2}\right)$  の値を求めなさい。

(3)  $f(-x) = -f(x)$  を証明しなさい。

(4)  $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{f(x)}$  を証明しなさい。

(5)  $a > 0$ ,  $b > 0$  のとき、 $f(a) + f(b) \geq 4f(a+b)$  を証明しなさい。

(不等式  $A \geq B$  を証明する方針の 1 つとして、 $A - B \geq 0$  を証明すればよい。)