着眼点

(1)，(2)は問題の意味が分かれば簡単でしょう。

(3)は背理法を使えば簡単だと思います。

(4)は(1)や(2)を参考にすれば考えやすいでしょう。

(5)は背理法を使うことに思い付くかもしれません。どうやって矛盾を導くのかに手間取るかもしれません。

解答例

(1)　次のとおり

赤	0	1	2
青	1	0	2

赤	0	1	2
青	2	1	0

(2)　次のとおり

赤	0	1	2	3	4	5	6
青	0	2	4	6	1	3	5

赤	0	1	2	3	4	5	6
青	3	5	0	2	4	6	1

(3)　b_i の定義より次のことが成り立つ

$$b_i=\begin{cases} 2i & \left(0\leqq i\leqq \dfrac{n-1}{2}\right) \\ 2i-n & \left(\dfrac{n+1}{2}\leqq i\leqq n-1\right) \end{cases}\quad\cdots①$$

背理法で証明する

異なる i，j に対して $b_i=b_j$ であると仮定する

上のことより

$$b_i=2i \text{ または } 2i-n,\ b_j=2j \text{ または } 2j-n$$

とかける

これらを辺々引けば，$b_i=b_j$ より

$$2(i-j)=0 \text{ または } \pm n$$

が得られるが，$i\fallingdotseq j$ より左辺は0と異なる偶数である

一方，n は奇数であるから左辺と右辺が等しくなることは不可能であり矛盾である

よって，b_0，b_1，$\cdots$，b_{n-1} の値はすべて異なる

(4)　頂点を k だけずらして赤い正 n 角形の頂点 R_k に青い正 n 角形の頂点 B_0 を合わせて重ねたとすると，$0\leqq i\leqq n-1$ に対して

頂点 R_{k+i} と頂点 B_i（$0\leqq k+i\leqq n-1$），頂点 R_{k+i-n} と頂点 B_i（$n\leqq k+i\leqq 2n-1$）

が重なる

$i=k$ のとき，すなわち，頂点 B_k に対応する番号が一致することを証明する

実際，

（i）　$0\leqq 2k\leqq n-1$ のとき，頂点 R_{2k} と頂点 B_k が重なる

(頂点 R_{2k} の番号)$=2k$ である

一方，$0\leqq k\leqq \dfrac{n-1}{2}$ であるから，①より(頂点 B_k の番号)$=2k$ である

（ii）　$n\leqq 2k\leqq 2n-1$ のとき，頂点 R_{2k-n} と頂点 B_k が重なる

(頂点 R_{2k-n} の番号)$=2k-n$ である

一方，$\dfrac{n}{2}\leqq k\leqq\dfrac{2n-1}{2}$ であるが，n は奇数であるから $\dfrac{n+1}{2}\leqq k\leqq n-1$ である

したがって，①より (頂点 B_k の番号)$=2k-n$ である

以上で，頂点 B_k に対応する番号が一致することが証明された

(5)　背理法で証明する

頂点をいくつずらして合わせて重ねたとしても，赤い正 n 角形の頂点の番号と青い正 n 角形の頂点の番号が一致するところがあると仮定する

このとき，任意の k （$0\leqq k\leqq n-1$）に対して $b_i=k+i$ または $b_i=k+i-n$，すなわち

$b_i-i=k$ または $b_i-i=k-n$

となる i がある

$k=0$ のときの i を i_0，b_i を c_0

$k=1$ のときの i を i_1，b_i を c_1

$k=2$ のときの i を i_2，b_i を c_2

…

$k=n-1$ のときの i を i_{n-1}，b_i を c_{n-1}

とする。すなわち

$c_0-i_0=0$

$c_1-i_1=1$ または $c_1-i_1=1-n$

$c_2-i_2=2$ または $c_2-i_2=2-n$

…

$c_{n-1}-i_{n-1}=n-1$ または $c_{n-1}-i_{n-1}=(n-1)-n$

である

これらをすべて足し合わせる

作り方より，i_0，i_1，…，i_{n-1} は 0 から $n-1$ までの整数ですべて異なる

同様に，c_0，c_1，…，c_{n-1} も 0 から $n-1$ までの整数ですべて異なる

つまり，i_0，i_1，…，i_{n-1} および c_0，c_1，…，c_{n-1} は整数 0，1，…，$n-1$ の並べ替えである

したがって，(左辺の和)$=0$ である

一方，

(右辺の和)$=0+1+2+\cdots+(n-1)-$(n の整数倍)

であるが，

$$\begin{aligned}&0+1+2+\cdots+(n-1)\\&=\{1+(n-1)\}+\{2+(n-2)\}+\cdots+\left\{\left(\frac{n}{2}-1\right)+\left(\frac{n}{2}+1\right)\right\}+\frac{n}{2}\\&=n+n+n+\cdots+n+\frac{n}{2}\end{aligned}$$

であるから，これは n の整数倍にはならず，右辺の和が 0 になることはない

これは矛盾である

よって，頂点を適当にずらして重ねれば，赤い正 n 角形の頂点の番号と青い正 n 角形の頂点の番号がすべて異なるようにできる