$\boxed{\text{着眼点}}$

(1)　設問のとおり，$x=0$，$y=2$ を代入する。

(2)　①は $x=1$，$y=2$ を，②は $x=1$，$y=-1$ を，③は $x=y=\sqrt{2}$ を代入する。

(3)　$-x=-1\cdot x$ とする。

(4)　$x\geqq 0$ のとき，$x=\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}$ とし，$x<0$ のときは(3)を利用する。

(5)　$0<a<b$ のとき，$b=ka$（$k>1$）とおく。

(6)　この関数のグラフは y 軸に関して対称であることと，$x>0$ のとき増加関数であることから，最大・最小が分かる。

$\boxed{\text{解答例}}$

(1)　条件（Ⅰ）に，$x=0$，$y=2$ を代入すると

$f(0)=f(0)f(2)-f(0)-f(2)+2$

$f(0)=3f(0)-f(0)-3+2$　　よって，$f(0)=1$

(2)①　条件（Ⅰ）に，$x=1$，$y=2$ を代入すると

$f(2)=f(1)f(2)-f(1)-f(2)+2$

$3=3f(1)-f(1)-3+2$　　よって，$f(1)=2$

②　条件（Ⅰ）に，$x=-1$，$y=-1$ を代入すると

$f(1)=f(-1)f(-1)-f(-1)-f(-1)+2$

$2=(f(-1))^2-2f(-1)+2$

$\{f(-1)\}^2-2f(-1)=0$

$f(-1)\cdot\{f(-1)-2\}=0$

条件（Ⅳ）より $f(-1)\neq 0$ なので，$f(-1)=2$

③　条件（Ⅰ）に，$x=\sqrt{2}$，$y=\sqrt{2}$ を代入すると

$f(2)=f(\sqrt{2})f(\sqrt{2})-f(\sqrt{2})-f(\sqrt{2})+2$

$3=(f(\sqrt{2}))^2-2f(\sqrt{2})+2$

$\{f(\sqrt{2})\}^2-2f(\sqrt{2})-1=0$

解の公式を用いて，$f(\sqrt{2})=1\pm\sqrt{2}$

$\sqrt{2}>1$なので，条件（Ⅲ）より，$f(\sqrt{2})=1+\sqrt{2}$

(3)　$f(-x)=f(-1\cdot x)$

$=f(-1)f(x)-f(-1)-f(x)+2$

$=2f(x)-2-f(x)+2$

$=f(x)$

よって，$f(-x)=f(x)$

(4)　$x\geqq 0$のとき，$f(x)=f(\sqrt{x}\cdot\sqrt{x})$

$=f(\sqrt{x})f(\sqrt{x})-f(\sqrt{x})-f(\sqrt{x})+2$

$=\{f(\sqrt{x})\}^2-2f(\sqrt{x})+2$

$=\{f(\sqrt{x})-1\}^2+1\geqq 1$

$x<0$のとき，$x=-t$（$t>0$）とおくと，(3)より，$f(x)=f(-t)=f(t)\geqq 1$

よって，すべての実数 x に対して，$f(x)\geqq 1$

等号が成り立つときは，$f(\sqrt{x})=1$のときである

ここで，$f(x)=1$ を満たすのは $x=0$ のみであることを示す

$f(x)=1$ かつ $x\neq 0$ とするとき，$f(1)=2$ より

$$2=f(1)=f\left(x\cdot\frac{1}{x}\right)=f(x)f\left(\frac{1}{x}\right)-f(x)-f\left(\frac{1}{x}\right)+2=f\left(\frac{1}{x}\right)-1-f\left(\frac{1}{x}\right)+2=1$$

となり矛盾する

ゆえに，$f(x)=1$ を満たすのは $x=0$ のみである

よって，等号が成り立つのは $x=0$ のときである

(5) $\dfrac{b}{a}=k$，すなわち $b=ka$ とおく

このとき，$0<a<b$なので，$k>1$である

$$\begin{aligned} f(b)&=f(ak)\\ &=f(a)f(k)-f(a)-f(k)+2\\ &=f(k)\{f(a)-1\}-f(a)+2\cdots\cdots\cdots① \end{aligned}$$

(4)より $a>0$ のとき $f(a)>1$，条件（Ⅲ）より $k>1$ なので $f(k)>2$ であることから，①は

$$f(b)>2\{f(a)-1\}-f(a)+2=f(a)$$

よって，$0<a<b$ のとき，$f(a)<f(b)$ である

次に，$b<a<0$ のとき，$0<-a<-b$ となるので，$f(-a)<f(-b)$

$f(-x)=f(x)$ なので，$f(a)<f(b)$

よって，$b<a<0$ のとき，$f(a)<f(b)$ である

(6) (5)より，$x<0$ のとき，関数 $f(x)$ は減少関数，$x>0$ のとき，関数 $f(x)$ は増加関数なので，最小値は $f(0)$ である

また，$f(-8)=f(8)$ となるので，最大値は $f(-8)$ である

条件（Ⅰ）に，$x=2$，$y=2$ を代入すると

$$f(4)=f(2)f(2)-f(2)-f(2)+2=3\cdot3-3-3+2=5$$

条件（Ⅰ）に，$x=4$，$y=2$ を代入すると

$$f(8)=f(4)f(2)-f(4)-f(2)+2=5\cdot3-5-3+2=9$$

よって，$x=-8$ のとき最大値 9，$x=0$ のとき最小値 1