

配点

(1) 各 4 点×2 問= 8 点 (2) 各 5 点×2 問= 10 点 (3) 5 点 (4) 7 点 (5) 10 点

講評

昨年に引き続いて、問題 1 は難しい理論や複雑な計算、裏ワザの公式などは必要としません。とにかく考える問題です。

(1)と(2)についてはほとんどの人ができていました。

(3)については、簡単に言ってしまうと b_0, b_1, \dots, b_{n-1} の値は

前半 (半分より前) が 0, 2, 4, 6, … と偶数が順に並ぶ

後半 (半分より後) が 1, 3, 5, 7, … と奇数が順に並ぶ

つまり表にすると

赤	0	1	2	3	…	$\frac{n-1}{2}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n+3}{2}$	…	$n-1$
青	0	2	4	6	…	$n-1$	1	3	…	$n-2$

← 偶数が順に並ぶ → ← 奇数が順に並ぶ →

ということですから値がすべて異なることはほぼ当たり前です。それをうまく表現することができるかが得点のカギとなりました。思考力・判断力だけではなく、表現力も必要な問題です。解答は背理法を使って証明しましたが、こんなに回りくどく書かなくても、上述のことがきちんと述べられていればもちろん正解です。

(4)は白紙またはほぼ白紙の答案が目立ちました。解答のように「頂点 B_k に対応する番号が一致する」ということを明確に言及した答案はほとんどありませんでしたが、本質的にこのことを意味している答案には得点を差しあげました。また、いくつかの具体的な n に対して考察してくれた答案や、上に挙げた表を用いて詳しく考察してくれた答案もありました。

(5)も白紙、またはほぼ白紙の答案ばかりでした。答案の中に、「完全順列の理論によって成り立つ」というようなものがありました。恥ずかしながら私は「完全順列」というのを知りませんでしたので調べてみました。ご存知の方も多いとは思いますが、自然数 $1, 2, 3, \dots, n$ を一列に並べるとき、その i 番目 ($1 \leq i \leq n$) の数が i ではない順列のことを完全順列といいます。ただ、その詳しい理論までは私は調べることができませんでした。(5)の命題のことを意味する理論がよく知られているのかもしれませんが、それならばその命題について証明もこめて書いていただきたかったです。ただ、この答案のおかげで私もまた 1 つ勉強になりました。どうもありがとうございます。

今回も皆さんの発想を面白く読ませていただきました。数学的な発想や考え方のよさを味わうことができましたか。この問題に限らずいろいろな問題に興味を持って取り組んでみてくださいね。

(札幌静修高等学校 杉本幸司)