

配点

(1) 2点 (2) ①3点 ②3点 ③3点 (3) 4点 (4) 10点 (5) 9点 (6) 6点

講評

はじめに、 $f(x)=|x|+1$ として、作問しました。 $f(x)=|x|+1$ に気付いた生徒は、答案の内容から7名いました。作問したとき、この関数に気が付く生徒はほとんどいないと思っていましたが、受験生の能力の高さに感心するばかりです。

しかし、 $f(x)=|x|+1$ と決めて解答した答案もあり、それは点数にはなりません。与えられた条件と求めた答えのみを利用してください。

(1)について、点数を取ってほしいことと、代入する値によって $f(0)$ の値が2つ出てくることになるので、代入する値を指定しました。解答できなかった生徒は、このような「関数方程式」の問題を勉強したことのない生徒だと思っています。説明がまったくなく答だけの答案には点数は与えませんでした。

(2)について、(1)ができる生徒は、(2)も解答していました。①について、 $x=y=1$ を代入すると、 $f(1)=1$ または $f(1)=2$ となり2つの値が出てきます。この2つを答にしている受験生がいましたが、 $f(x)$ は関数なので1つの値にすることに気付いてほしいところです。解答例では、2通りの値がでないように $x=1, y=2$ を代入しました。

(3)について、関数方程式の問題としては、よくある設問です。

(4)について、前半については解答例の他に次のような解答が多数ありました。

$x>1$ のときは、条件 (II) より成り立つ。

$x=1$ のときは、 $f(1)=2$ なので成り立つ。

$0<x<1$ のとき、 $f(x)>1$ を示せばよい。

ここで、条件 (I) に $y=\frac{1}{x}$ を代入すると

$$f(1)=f(x)f\left(\frac{1}{x}\right)-f(x)-f\left(\frac{1}{x}\right)+2$$

$$2=f(x)f\left(\frac{1}{x}\right)-f(x)-f\left(\frac{1}{x}\right)+2$$

$$\{f(x)-1\}\left\{f\left(\frac{1}{x}\right)-1\right\}=1 \quad \dots\dots\textcircled{1}$$

$x>1$ のとき、 $f(x)>2$ なので $f(x)-1>1$ となる。

したがって、①より $x>1$ のとき、 $0<\frac{1}{x}<1$ となり、 $0<f\left(\frac{1}{x}\right)-1<1$ がいえるので、

よって、 $0<x<1$ のとき、 $f(x)=1$ となる。

前半の証明は解答している受験生は多くいましたが、後半が難しかったようです。

解答例と同じ解答はありませんが、双葉高校の板垣君は次のような解答をしていました。

$f(-x)=f(x)$ なので、 $x>0$ のときを証明する。

$f(t)=1$ となる正の数 t が存在すると仮定する。

このとき、 $f(2t)=f(2)f(t)-f(2)-f(t)+2$

$$=3f(t)-3-f(t)+2=2f(t)-1$$

$f(t)=1$ より、 $f(2t)=1$

$$f(4t)=f(2\times 2t)=f(2)f(2t)-f(2)-f(2t)+2$$

$$= 3f(2t) - 3 - f(2t) + 2 = 2f(2t) - 1$$
$$f(2t) = 1 \text{ なので, } f(4t) = 1$$

すなわち、すべての自然数 n に対して、 $f(2^n t) = 1$ となる。

ある自然数 n に対して、 $2^n t > 1$ となるので、条件 (III) に矛盾する。

したがって、 $x > 0$ のとき、 $f(x) \neq 1$ である。

よって、 $f(x) = 1$ となるのは、 $x = 0$ のみである。

厳密には、 $f(2^n t) = 1$ の部分は数学的帰納法が必要ですが、よく考えられた解答であり得点を与えることとしました。

なお、後半の解答例は、双葉高校の古田先生によるものです。この場を借りて感謝します。

(5)について、関数方程式で不等式になると極端に出来なくなりました。頑張って答案を作ってくれている受験生は多くいましたが、残念ながら得点を与えることができたのは2名だけでした。実は、作問もこの設問に時間をかけました。

(6)について、(4)(5)が出来なくても、答があっている答案には点数を与えました。ただし、 $f(x) = |x| + 1$ と決めた場合は0点としました。

【アンケート結果】

受験生 160 名のうち、難しい 70 名、そこそこ難しい 9 名、結構簡単 2 名、かなり簡単 0 名、無回答 79 名でした。コメントとしては、「問いが少し混乱した」「難しい」(2名)「関数の形が見えなかった」「解答用紙が小さい」「過去問では(3)までだったので、ここまでいったのは良かった。この関数は $y = |x| + 1$ ですか」「数学コンテストと言えばこの関数の問題」「過去問と似ていたので途中で分かりました」「(4)が分からなかった」「まちがっている気しきしません」

「難しい」というような意見が多かったようですが、関数方程式の問題に慣れていないとことが大きな理由の1つかと思っています。少し慣れてると「難しい」から「そこそこ難しい」に変わったように思います。実際、コメントにあったように、数学コンテストでは過去に関数方程式の問題を出題しているので、過去問を勉強した生徒は、「やはり出た」という感想だと思います。出題者としては、新しい問題の作問に心がけていますが、数学 I A という範囲では類似問題も出てくるということは十分あり得ることです。過去問を勉強して、その類似性に気が付くことも大切な能力であり、今後の皆さんの勉強にも役立つと確信しています。

(北海道岩見沢東高等学校 大和達也)