

着眼点

- (1) x, y に 0 または 1 を代入する。
- (2) 条件(II)を使う。
- (3) 条件(II), (III)を使う。
- (4) $f(x)=1, y=x$ とみる。
- (5) (3)と(4)を用いる。

(1)~(4)の設問で、 $f(x)=x^3$ であることは気が付きやすい。したがって、 $f\left(-\frac{5}{2}\right)$ の値は予想がつく。もちろん、 $f(x)=x^3$ として計算することは出来ません。

解答例

- (1) 条件(III)の式に $y=0$ を代入すると、

$$f(f(x)) = f(f(x)) + f(0)$$

$$\text{よって、 } f(0) = 0$$

条件(III)の式に $x=1, y=1$ を代入すると、

$$f(f(1)+1) = f(f(1)) + 3f(1)(f(1)+1) + f(1)$$

$$f(1)=1 \text{ であるから、 } f(2) = 1 + 3(1+1) + 1 = 8$$

- (2) 条件(II)より、 $f(a) = \frac{1}{2}$ となる実数 a が存在する。

条件(III)の式に $x=a, y=\frac{1}{2}$ を代入すると、

$$f\left(f(a) + \frac{1}{2}\right) = f(f(a)) + 3 \cdot \frac{1}{2} f(a) \left(f(a) + \frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$f\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{3}{4} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$1 = f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{3}{4} + f\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\text{よって、 } f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}$$

- (3) 条件(II)より、 $f(b) = -y$ となる実数 b が存在する。

$$\text{条件(III)より、 } f(f(b)+y) = f(f(b)) + 3yf(b)(f(b)+y) + f(y)$$

$$f(-y+y) = f(-y) + 3y \cdot (-y)(-y+y) + f(y)$$

$$0 = f(-y) + f(y)$$

$$f(-y) = -f(y)$$

よって、 y を x と置き換えると

$$f(-x) = -f(x)$$

- (4) 条件(II)より、 $f(c) = 1$ となる実数 c が存在する。

x に c を代入、 y を x とすると

$$\text{条件(III)より、 } f(f(c)+x) = f(f(c)) + 3xf(c)(f(c)+x) + f(x)$$

$$f(1+x) = f(1) + 3x(1+x) + f(x)$$

$$\text{よって、 } f(x+1) = f(x) + 3x^2 + 3x + 1$$

- (5) $f\left(-\frac{5}{2}\right) = -f\left(\frac{5}{2}\right)$ となるので、 $f\left(\frac{5}{2}\right)$ を求めればよい。

$$\begin{aligned}f\left(\frac{5}{2}\right) &= f\left(\frac{3}{2} + 1\right) \\ &= f\left(\frac{3}{2}\right) + 3\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{3}{2}\right) + 1 \\ &= f\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{49}{4} \quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f\left(\frac{3}{2}\right) &= f\left(\frac{1}{2} + 1\right) \\ &= f\left(\frac{1}{2}\right) + 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{1}{2}\right) + 1 \\ &= \frac{1}{8} + \frac{3}{4} + \frac{3}{2} + 1 = \frac{27}{8}\end{aligned}$$

$$\textcircled{1}\text{より, } f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{27}{8} + \frac{49}{4} = \frac{125}{8}$$

$$\text{よって, } f\left(-\frac{5}{2}\right) = -\frac{125}{8}$$