

配点

- (1) 8点 (2) 6点 (3) 8点 (4) 8点 (5) 10点

講評

$f(x)=x^3$ として作問しました。これまでの数学コンテストで出題した関数方程式には、合成関数の入った方程式を出題したことがなく、予想外だったと思います。また、条件(Ⅱ)の使い方が分からない生徒が多いように感じました。条件(Ⅱ)は上への写像(全射)というものであり、高校では扱われないことなので、この条件(Ⅱ)も難しく感じた理由の一つかと思っています。

実際、生徒からのアンケートより、「難しい」が71名、「そこそこ難しい」が5名、「結構簡単」と「かなり簡単」は0名でした。また、一言の回答欄には「説明がわからない」「昨年より難しい」というようなコメントが書いてありました。出題者としては、昨年より難しいとは思っていなかったのですが…。

各設問の講評は以下のとおりです。

- (1) 得点をとってほしい設問ですが、関数方程式になれていない受験生が多いように感じました。
また、答えだけの答案には点数は与えていません。(例年と同じ講評)
- (2) 条件(Ⅱ)を使うことが出来れば容易な設問です。
- (3) 他の設問が出来ていても、この設問に苦戦した生徒もいました。
- (4) (2)(3)が出来なくても、解答できる設問です。
- (5) (1)~(4)から、 $f(x)=x^3$ であることに気が付き、その関数から答えを出している答案がありました。
 $f(x)=x^3$ に気が付いたことには大変感心しますが、それは予想なので点数は与えませんでした。
(このことも例年と同じ講評)

最後に、 $f(x)$ が微分可能ならば、次のように $f(x)=x^3$ を求めることができます。

$$f(f(x)+y)=f(f(x))+3yf(x)(f(x)+y)+f(y) \text{ の両辺を } y \text{ について微分すると}$$

$$f'(f(x)+y)=3f(x)(f(x)+y)+3yf(x)+f'(y) \quad \dots \textcircled{1}$$

①に $y=0$ を代入すると、

$$f'(f(x))=3(f(x))^2+f'(0)$$

$f'(0)=c$ とおき、 $f(x)$ を x とすると

$$f'(x)=3x^2+c$$

ゆえに、 $f(x)=x^3+cx+d$

$f(0)=0$, $f(1)=1$ より、 $c=0$, $d=0$

よって、 $f(x)=x^3$

(北海道岩見沢東高等学校 大和達也)