

### 問題 3

実数値関数  $f(x)$  は次の条件 (I), (II), (III) を満たしている。

(I)  $f(1) = 1$

(II) 関数  $f(x)$  の定義域と値域は実数全体であり、任意の実数  $t$  に対して、 $f(s) = t$  となるような実数  $s$  が存在する。

(III) 実数  $x, y$  に対して、 $f(f(x) + y) = f(f(x)) + 3yf(x)(f(x) + y) + f(y)$

$g(f(x))$  とは、2つの関数  $y = f(x)$ ,  $z = g(y)$  があり、 $f(x)$  の値域が  $g(y)$  の定義域に含まれているとき、 $g(y)$  に  $y = f(x)$  を代入して得られる関数である。

例)  $f(x) = 2x + 1$ ,  $g(x) = 3x - 2$  のとき、

$$g(f(x)) = g(2x + 1) = 3(2x + 1) - 2 = 6x + 1$$

$$f(f(x)) = f(2x + 1) = 2(2x + 1) + 1 = 4x + 3$$

(1)  $f(0)$ ,  $f(2)$  の値を求めなさい。

(2)  $f\left(\frac{1}{2}\right)$  の値を求めなさい。

(3)  $f(-x) = -f(x)$  を示しなさい。

(4)  $f(x+1)$  を  $f(x)$  と  $x$  で表しなさい。

(5)  $f\left(-\frac{5}{2}\right)$  の値を求めなさい。