

### 問題 3

実数値関数  $f(x)$  は次の条件(Ⅰ), (Ⅱ), (Ⅲ)を満たしている。

(Ⅰ)  $f(1)=1$

(Ⅱ) 関数  $f(x)$  の定義域と値域は実数全体であり, 任意の実数  $t$  に対して,  $f(s)=t$  となるような実数  $s$  が存在する。

(Ⅲ) 実数  $x, y$  に対して,  $f(f(x)+y)=f(f(x))+3yf(x)(f(x)+y)+f(y)$

$g(f(x))$  とは, 2つの関数  $y=f(x), z=g(y)$  があり,  $f(x)$  の値域が  $g(y)$  の定義域に含まれているとき,  $g(y)$  に  $y=f(x)$  を代入して得られる関数である。

例)  $f(x)=2x+1, g(x)=3x-2$  のとき,

$$g(f(x))=g(2x+1)=3(2x+1)-2=6x+1$$

$$f(f(x))=f(2x+1)=2(2x+1)+1=4x+3$$

(1)  $f(0), f(2)$  の値を求めなさい。

(2)  $f\left(\frac{1}{2}\right)$  の値を求めなさい。

(3)  $f(-x)=-f(x)$  を示しなさい。

(4)  $f(x+1)$  を  $f(x)$  と  $x$  で表しなさい。

(5)  $f\left(-\frac{5}{2}\right)$  の値を求めなさい。