問題５

$\boxed{\text{着眼点}}$

今回は n 進法で表した Kaprekar（カプレカー）数を取り上げました。Kaprekar 数は，3 桁 495 と 4 桁 6174 が有名で，第 23 回の本コンテスト問題３にて出題がありました。最近では数学Aにて n 進法が登場したので，今回はバージョンアップしての再登場となりました。

各問についてですが，

(1)では実際に計算して見つけること。

(2)では各位の振る舞いがどうなるかを見る練習。

(3)では 3 桁の Kaprekar 数がただ一つ（専門用語ではunique）であることを調べる。

(4)は(3)を一般化して「n 進 Kaprekar 数」の存在性を調べる。

というものでした。

(5)は（２種類以上の数字からなる）3 桁の数は，ある回数以内で(4)の「n 進 Kaprekar 数」にたどり着くことを示しました。この(5)を用いると，(3)，(4)をまとめて示すこともできます。

(6)は 549945 のように，３桁の「n 進 Kaprekar 数」を「増殖」させてみました。

本問から，十分大きな桁数の数についても，「n 進 Kaprekar 数」が存在することがいえます。加えて，n を 4 以上の偶数とするとき，n 進数

$(n-2,\ n-4,\ \cdots,\ 6,\ 4,\ 1,\ n-1,\ n-3,\ \cdots,\ 5,\ 3,\ 2)_n$

は性質 $\overline{K}_n$ を満たすので，このことと(6)より，性質 $\overline{K}_n$ を満たす数が複数存在し，一般に(1)(あ)のような 1 つの数にたどり着くとはいえません。

最後に，今回は取り上げませんでしたが，n 進数の 4 桁ではどうなるか。考えてみましょう。

$\boxed{\text{解答例}}$

(1)(あ) $\boxed{110} \to \boxed{99} \to \boxed{891} \to \boxed{792} \to \boxed{693} \to \boxed{594} \to \boxed{495} \to \boxed{495}$

(い) $\boxed{218_{(9)}} \to \boxed{682_{(9)}} \to \boxed{583_{(9)}} \to \boxed{484_{(9)}} \to \boxed{385_{(9)}} \to \boxed{484_{(9)}} \to \boxed{385_{(9)}} \to \boxed{484_{(9)}}$

(2)　3 つの数字の中央値は，操作 K における一番大きい数 M と一番小さい数 m において，ともに n の位となるので，M，m の n の位は等しい。

一方，条件より一の位では M の数字より m の方が小さい。

したがって，一の位や n の位では繰り下がりが起こり，操作 K 後の数の n の位は $n-1$ となる。

また，3 つの数字の最大値を a，最小値を b と表すと，操作 K 後の数の n^2 の位は $a-b-1$ であり，一の位の数字は $n+b-a$ である。したがって，n^2 の位の数字と一の位の数字の和は $(a-b-1)+(n+b-a)=n-1$ となる。

(3)　(2)より性質 K_{10} を満たす 3 つの数字は 9，a，$9-a$（$a \leqq 4$）と表せる。

$M=(9,\ 9-a,\ a)_{10}$，$m=(a,\ 9-a,\ 9)_{10}$ となり，(2)より十の位と一の位が繰り下がるので，$M-m=(8-a,\ 9,\ a+1)_{10}$ となる。

条件より，数 $M-m$ が性質 K_{10} を満たすとき，各位の数字で比較すると

$8-a<9-a\leqq 9$ より　　$8-a=a$　　ゆえに，　$a=4$

となる。また，このとき，(1)より 495 は操作 K 後も変わらないので，495 のみが性質 $\overline{K}_{10}$ を満たす。

(4)　(3)と同様に考えると，性質 K_n を満たす3桁の数の各位の数字は(2)より，$n-1$，a，$n-1-a$ （$n-1-a \geqq a$）と表せる。

このとき，$n-2-a<n-1-a \leqq n-1$ より，性質 K_n を満たす3桁の数が存在する条件は，$n-2-a=a$ の解が存在する，すなわち，n が偶数のときで，このとき，$a=\dfrac{n}{2}$ 。したがって，性質 $\overline{K}_n$ を満たす3桁の数は

$$\left(\frac{n}{2}-1,\ n-1,\ \frac{n}{2}\right)_n=\frac{1}{2}(n-1)n(n+1)$$

このとき，操作K後の数字は

$$\left(n-1,\ \frac{n}{2},\ \frac{n}{2}-1\right)_n-\left(\frac{n}{2}-1,\ \frac{n}{2},\ n-1\right)_n$$
$$=\left((n-1)-1-\left(\frac{n}{2}-1\right),\ n-1,\ \left(\frac{n}{2}-1\right)+n-(n-1)\right)_n$$
$$=\left(\frac{n}{2}-1,\ n-1,\ \frac{n}{2}\right)_n$$

となり，操作Kの前後で変わらない。

(5)　3桁の各位の3つの数字を a，b，c（$a \geqq b \geqq c$）と表すと，(2)より操作K後の数は $(a-c-1,\ n-1,\ c+n-a)_n$ となる。ここで，対称性より $a-c-1<c+n-a$ としても差し支えないので，$a-c-1=b'$ と表すと，(2)より $(b',\ n-1,\ n-1-b')_n$ と表せて，操作Kを行うと，$(b'+1,\ n-1,\ n-2-b')_n$ となる。つまり，n^2 の位と一の位の数字の差は，操作Kを経て，2だけ小さくなる。したがって，0と $n-1$ から開始すると，(4)より n が偶数なので，$\dfrac{n}{2}$ 回で n^2 の位と一の位がそれぞれ $\dfrac{n}{2}-1$，$\dfrac{n}{2}$ となる。

以上のことから，操作Kを最大 $\dfrac{n}{2}+1$ 回繰り返すことで，性質 $\overline{K}_n$ を満たす数になる。

(6)　3種類の数字を a，b，c（$a>b>c$）とするとき，$M-m$ について各位の数字はそれぞれ $a-c$ が $d-1$ 個，$a-c-1$ が1個，$n-1$ が d 個，$c+n-1-a$ が $d-1$ 個，$c+n-a$ が1個となる。ここで，これらの数字の大小は

$$a-c-1<a-c \leqq n-1$$
$$c+n-1-a<c+n-a \leqq n-1$$

であり，これら6つの数字は a，b，c となるので，$a=n-1$ 。このとき，2つの不等式は

$$n-2-c<n-1-c \leqq n-1$$
$$c<c+1 \leqq n-1$$

したがって，$b=c+1$ であり，$n-2-c=b$，c となる。

以上のことから

$$(b,\ c)=\left(\frac{n-1}{2},\ \frac{n-3}{2}\right),\ \left(\frac{n}{2},\ \frac{n}{2}-1\right)$$

ここで，$(b,\ c)=\left(\dfrac{n-1}{2},\ \dfrac{n-3}{2}\right)$ のとき

$$a-c=n-1-\frac{n-3}{2}=\frac{n+1}{2}>\frac{n-1}{2}$$

となり，この数が存在するためには，$\dfrac{n+1}{2}=n-1$，つまり，$n=3$ となり，$n>3$ と矛盾。

このことから，$(b,\ c)=\left(\dfrac{n}{2},\ \dfrac{n}{2}-1\right)$ のときのみで，$M-m$ について各位の数字は

$a-c=b$ が $d-1$ 個，$a-c-1=c$ が 1 個，$n-1$ が d 個，$c+n-1-a=c$ が $d-1$ 個，$c+n-a=b$ が 1 個となる。つまり，a，b，c がともに d 個あり，$3d$ 桁の数が K_n を満たす条件は，n が偶数であり，3 つの数字は(4)の各位の 3 つの数字であることである。