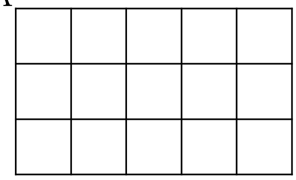
問題１

【図１】

A



B

図１のような碁盤の目状の通路がある。通路に沿って最短距離で左端上の点 A から右端下の点 B まで移動を行うためには横方向に５，縦方向に３の移動を行わなければならない。このような通路を (5，3) 型通路と名づける。

なお，通路は縦１区画の距離と横１区画の距離は等しく，どの人も移動の際は通路に沿って最短距離で移動するものとする。

(1)　図１の通路を点 A から点 B まで移動する仕方は何通りあるか求めなさい。

(2)　図１の通路を新一さんが点 A から点 B まで移動し，同時に研二さんが点 B から点 A まで移動する。このとき２人が途中で出会い，２人とも移動を完了するまでの移動の仕方は何通りあるか求めなさい。ただし，２人の移動する速度は同じである。

(3)　図１の通路を１人の人が点 A から点 B まで移動（往路）し，さらに点 B から点 A まで移動（復路）する。

①　往路と復路で点 A と点 B 以外には一度も同じ点を通らないような往復の移動の仕方の例を１つかきなさい。

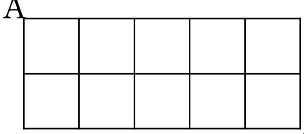
②　往路の通り方によっては復路でどのような移動の仕方をしても少なくとも一度は往路で通った点を通らなければ点 A に戻れない場合がある。そのときの往路の移動の仕方の例を１つかきなさい。

③　②の場合，往路で通った点を復路でも通らなければいけない理由を説明しなさい。（単に「通れないから」ではダメです）

(4)　ここでは (5，2) 型の通路について考える（図２参照）。この場合，点 A から点 B まで行く移動の仕方は何通りあるか求めなさい。また，点 A から点 B まで移動（往路）し，往路と同じ点を１つも通らずに点 B から点 A まで移動（復路）するような移動の仕方は何通りあるか求めなさい。

【図２】

A



B

(5)　再び (5，3) 型の通路について考える（図１参照）。

点 A から点 B まで移動（往路）し，往路と同じ点を１つも通らずに点 B から点 A まで移動（復路）ような移動の仕方は何通りあるか求めなさい。なお，説明のために必要ならば解答用紙の図を用いてもよい。

着眼点

碁盤の目状の通路の通り方が何通りあるかを求める問題。場合の数の問題なので，解き方としては順列や組合せなど計算で求める方法と数え上げで求める方法の二つが考えられるが，どちらの方法を使ってもいい。ただし，数え上げの場合は全部数え上げるとなると膨大な場合分けが必要になるので，対称性を使ったりして上手に求めてほしい。こちらが用意した解答を上回るエレガントな解答を期待して出題した。

(1)　同じものを含む順列の問題なので易しいと思うがどうだろうか。他の解法もある。

(2)　２人が途中で出会うとすると，どこの点で出会うのか。遠回りをしないのでちょうど

双方から等距離の点で出会うはずである。あとは場合分けの計算。

(3)　A から B に行って B から A に戻る移動なので，同じ点を通ってよいのなら往路の移動の場合の数の 2 乗となるが，同じ点を通らないので，個々の往路の通り方に対して復路の通り方を考えなければならない。ここで問題となるのは，往路の通り方によっては復路で同じ点を通らなければ B に戻れない場合があるということである。ここで使われる原理は以下である（証明は求めていない）。

「一般の $(m,\ n)$ 型通路において，左上の点 A と右下の点 B を結んだ線分の結合（境界）によって通路上の点は 2 つに分けられる。通路上の点は境界によって 2 つの部分（領域）に分けられるので，境界にない 2 つの点が同じ領域にないとき 2 つの点を境界上の点を通らずに線分で結ぶことはできない」

この問題の場合，往路の最初の移動が横方向で最後の移動が縦方向の場合，同じ点を通らないので復路の最初の移動は縦方向で，復路の最後の移動方向は横方向になり，復路の 1 番目の点（点 B の次）と復路の最後（点 A の手前）は同じ領域に属するので結ぶことができる。往路の最初が縦方向で最後が横方向の場合も同様である。

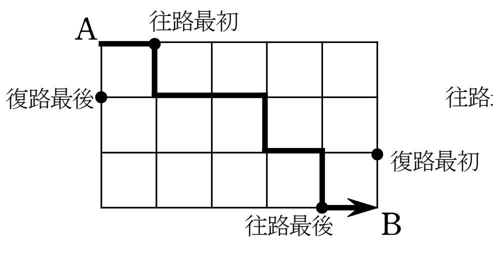
しかし，往路の最初の移動が横方向で最後の移動も横方向の場合，復路の最初が縦方向，最後も縦方向になるため，復路の最初の点と最後の点は同じ領域に属さないので，境界上の点を通らずに結ぶことはできない。復路の最初が縦方向，最後が縦方向の場合も同様である。このことを踏まえると

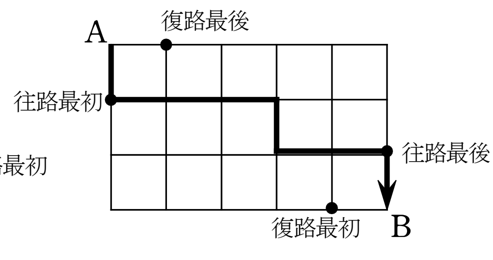
①　往路の最初と最後の方向が異なるとき境界を通らないような復路をとることができる。正解は多数ある。

②　往路の最初と最後の方向が同じとき往路上の点を通らない復路はとることができない。正解は多数ある。

③　上の内容を図解を含めて説明してくれればＯＫ

【往路の点を通らずに復路を引けない例】





(4)　(5，2) 型の場合，往路は $\dfrac{7!}{5!2!}=21$ 通りあるが，そのうち，往路の最初と最後が同じ向きの場合，往路上の点を通らない復路を取ることができないので，往路の最初が横方向で最後が縦方向の場合と，最初が縦方向で最後が横方向の場合について，それぞれ復路のとり方が何通りあるか調べるとよい。

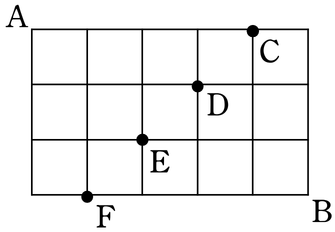
(5)　(5，3) 型の場合，往路は $\dfrac{8!}{5!3!}=56$ 通りあるが，復路が取れない場合を除いて，往路の最初が横方向で最後が縦方向の場合と，最初が縦方向で最後が横方向の場合について，復路のとり方が何通りあるかを調べるとよい。

解答例

(1)　縦方向の移動を↓，横方向の移動を→で表すと，点 A ら点 B への移動の仕方は，↓ 5 個，→ 3 個を並べる順列の総数に等しいので， $\dfrac{8!}{5!3!}=56$ 通り。

別解　8 回の移動のうち，どの 3 回縦方向に移動するかを決めたら残りの 5 回は横方向に移動すればよいので，移動の仕方の総数は， ${}_8C_3=\dfrac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2\cdot1}=56$ 通り。

(2)　新一と研二が出会うのは， 2 点 A，B から等しい距離にある点であるので，点 A からの距離も点 B からの距離も 4 である点（右図の C，D，E，F）である。



[1]　点 C で出会う場合　　$1\cdot\dfrac{4!}{1!3!}\times\dfrac{4!}{1!3!}\cdot1=16$ 通り

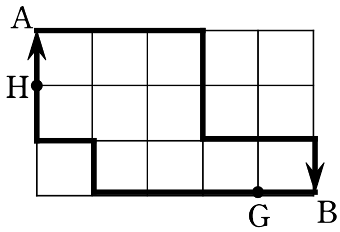
[2]　点 D で出会う場合　　$\dfrac{4!}{3!1!}\cdot\dfrac{4!}{2!2!}\times\dfrac{4!}{2!2!}\cdot\dfrac{4!}{3!1!}=576$ 通り

[3]　点 E で出会う場合　　$\dfrac{4!}{2!2!}\cdot\dfrac{4!}{3!1!}\times\dfrac{4!}{3!1!}\cdot\dfrac{4!}{2!2!}=576$ 通り

[4]　点 F で出会う場合　　$\dfrac{4!}{1!3!}\cdot1\times1\cdot\dfrac{4!}{1!3!}=16$ 通り

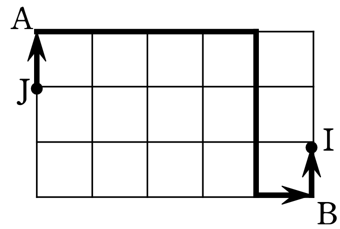
よって，[1]～[4]より， $16+576+576+16=1184$ 通りある。

(3)①　往路と復路で同じ点を通らずに 2 点 A，B 間を往復するのは，例えば右図の場合である。



往路の最初の移動の方向と往路の最後の移動の方向が異なっていれば，復路の最初に移動する点 G と復路の最後（点 A に戻る直前）の点 H は境界の同じ側にあるので，線分で結ぶことができる。（正答はこれ以外にも多数あり，一つには定まらない）

②　往路で通った点を通らずに復路で点 B から点 A まで行くことができないのは，往路の最初の移動と最後の移動が同じ方向のときであり，たとえば右図の場合である。



往路の最初と最後が→の場合，復路の最初と最後も↑となって，復路の最初に移動する点 I と復路の最後の点 J は境界の同じ側にないので，境界を通らずには線分で結ぶことができない。

（正答はこれ以外にも多数あり，一つには定まらない）

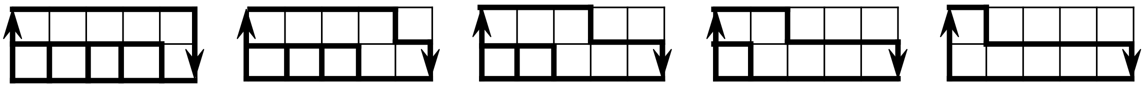
③　往路の最初が横方向（→）で最後も横方向とすると，復路は往路と同じ点を通れないので，復路の最初も最後も縦方向（↑）となる（②の図参照）。

往路の線分を結んでできる境界線によって図形の点は 2 つの領域に分かれ，復路の最初の点と最後の点は同じ領域に入らないので，往路の点を通らずに復路を結ぶことはできない。往路の最初も最後も縦方向の場合も同様である。

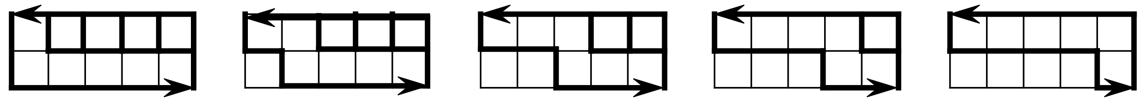
(4)　(5，2) 型通路の場合，点 A から点 B に移動する仕方の総数は $\dfrac{7!}{5!2!}=21$ 通り。

このうち，往路と復路で同じ点を通らないのは，往路の最初が縦方向で最後が横方向

のとき（５通り）及び往路の最初が横方向で往路の最後が縦方向のとき（５通り）であるので，それぞれの場合について可能な復路の取り方が何通りあるかを調べればよい。



5 通り　　4 通り　　3 通り　　2 通り　　1 通り

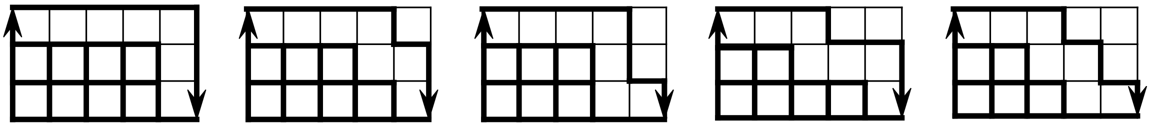


5 通り　　4 通り　　3 通り　　2 通り　　1 通り

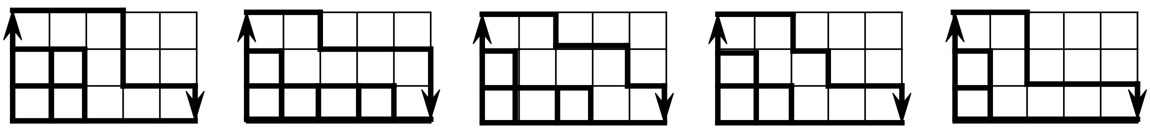
よって，復路で往路と同じ点を１つも通らずに点 B から点 A まで移動するような移動の仕方の総数は $(5+4+3+2+1)\times 2=30$ 通り。

(5)　(5，3) 型通路の場合，点 A から点 B に移動する仕方の総数は $\dfrac{8!}{5!3!}=56$通り。

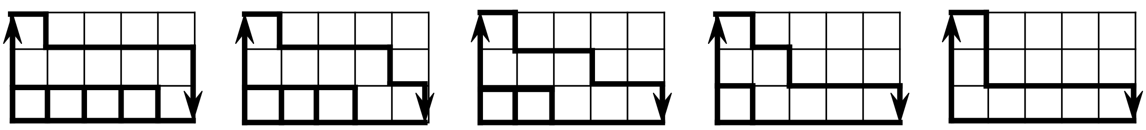
このうち，往路と復路で同じ点を通らないのは，往路の最初が横方向で最後が縦方向のとき（15 通り）及び往路の最初が縦方向で最後が横方向の場合（15 通り）であるので，それぞれの場合について可能な復路の取り方が何通りあるかを調べればよい。対称性を考えると前者と後者は同数なので，往路の最初が横方向で最後が縦方向の場合を考えて２倍すればよい。



15 通り　　14 通り　　10 通り　　12 通り　　9 通り



6 通り　　9 通り　　7 通り　　5 通り　　3 通り



5 通り　　4 通り　　3 通り　　2 通り　　1 通り

よって，往路の最初が横方向で最後が縦方向の場合，復路の総数は

$$15+14+10+12+9+6+9+7+5+3+5+4+3+2+1=105 \text{ 通り}$$

であり，対称性より往路の最初が縦方向で最後が横方向の場合の復路も同数 105 通りある。よって，全体では $105\times 2=210$ 通りある。

配点　(1) 6 点　(2) 7 点　(3)① 3 点　② 3 点　③ 5 点　(4) 8 点　(5) 8 点

講評

今回の問題１は場合の数（碁盤の目型の経路の数）の問題です。教科書では数学Ａの内容ですが，多くの学校ではこの時期には授業で扱われているのではないかと思って出題し

ました。出来は比較的よく，問題１だけの平均点は 23.9 点でした。

例年，数学コンテストでは問題１は基本問題として数学の根底にある考え方を問う問題を出題することが多いです。今回，この問題の根底にある数学的な考え方として出題したのは『図形上の異なる二つの点を結ぶことができるということはどういうことか』ということです。数学コンテストの過去問では第２回（今から 36 年前の問題）の第 I 部の$\boxed{4}$も点と点を結ぶという問題でした。今回の問題では，(3)の，特に③がその部分を問う出題になっています。記述式の問題ですがポイントを押さえると長く書く必要はありません。ただし，このような内容は教科書や授業で扱うことはあまりないと思うので，直感的には分かっていても明確に表現するのは難しかったのではないかと思います。問題文の中にも「単に通れないから，ではダメです」と但し書きをしました。みなさんの答案は一つ一つ読んで，意味は通じる（わからなくはない）けれど説明が足りないとか，こちらが聞きたいことに対して別のことを答えているような答案については減点している場合もあります。毎回数学コンテストの問題に対して事前に予想される解答を用意しておくのですが，今回も筆者の予想しないような答案が数多くありました。もちろん予想解答以外はダメなどという気持ちは全くありません。ただし，何回読んでも意味が通じないものや，設定がまぎらわしく混乱をまねいているものなど点数をあげられなかったものもあります。あと，説明も何にもなしで答だけを書いたものについては本来減点する予定でしたが，(1)については減点はしませんでした。

さて，(1)から順番にみていきましょう。碁盤の目の形の通路の通り方の問題なので教科書や学校で使っている問題集にもたぶんある問題だと思います。(1)の得点率は 97.1 %で 95 %以上の人が正解でした。ただし，式は正しいのに約分ミスなどで減点した人もいます。考え方で一番多かったのが「同じものを含む順列の個数」を使った人，次が「組合せ（８回のうち→が５回，↓が３回）」，一部に数え上げで求めていた人がいました。もちろんどの方法でもよいです。

(2)は点 A から点 B に向かった人と，点 B から点 A に向かった人が途中で出会ってゴールするまで行く経路の数を求める問題です。まず，途中で出会うのがどこの点であるかを図で示した人には部分点をあげました。惜しいのはゴールまで行くのではなく２人が出会うときまでの経路の数を求めた人が多かったことです。実は２人が出会うときまでの経路の数は(1)で出した「一人で点 A から点 B まで行くときの経路の数」と同じです（ちょっと考えれば気が付くと思います）。正解者は全体の 38 %ですが，式は正しいが計算ミスなどで答えだけ間違った人には部分点をあげました。(2)の得点率は 60.1 %でした。

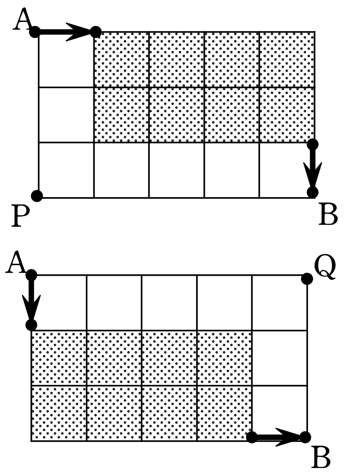
(3)の前半（①②）は点 A から点 B まで行って（往路），点 B から点 A まで戻る（復路）際に点 A，B 以外には往路で通った点を通らないような行き方①，及び往路の点を通らずには復路で点 B から点 A に戻れないような行き方②をそれぞれ書き入れよという問題です。どちらも答えは一つではなく条件を満たしていれば正解は何通りもあります。なぜこのような問題を入れたのかというと，往路と復路が重なる場合と重ならない場合の例を考えることによって，どのような場合には重ならず，どのような場合には重なる（同じ点を通らなければいけない）のかを考えて，どうすれば同じ点を通らずに往復できる

かのルールに気が付いてくれればいいと考えたからです。①はほとんどの人が正解していました。例としてひとつだけあげると，単純に外周を点 A から点 B まで行って，逆の外周を点 B から点 A まで行けばよい（他にもありますが）ので，見つけやすかったかもしれませんね。②は①より正解者は減りましたが，それでも 95 %以上の人が①②と正解していました。往路と復路で同じ点を通らなくてすむのはどんな場合で，同じ点を通らなければいけないのはどんな場合か気が付くと，次の(4)(5)にも生きてきます。

しかし，③はさすがに難しく，きちんと説明できた答案は 78 名と半数ほどでした。採点に際して説明を読みながらいくつかのパターンに分けて答案をチェックしました。解答例のように境界や領域という言葉を使っていなくても説明できている人もいましたが，説明不足，説明不十分と感じる答案も結構ありました。

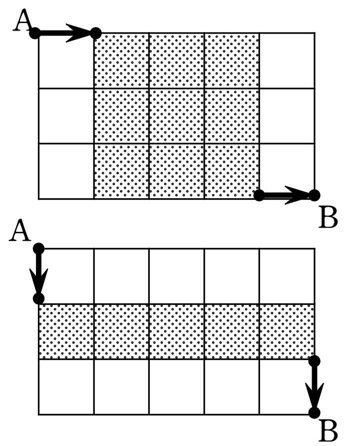
同じ点を通らなくてすむのは，往路の最初の移動の向きと往路の最後の移動の向きが同じでないときです。具体的にいえば往路の最初が→で最後が↓のとき（図１上）と，往路の最初が↓で最後が→のとき（図１下）です。移動は最短距離なので，往路の「→ 4 回，↓ 2 回」の移動を網掛け部の中で考え，復路を外周（B → P → A または B → Q → A）としてとることができる。

【図１】



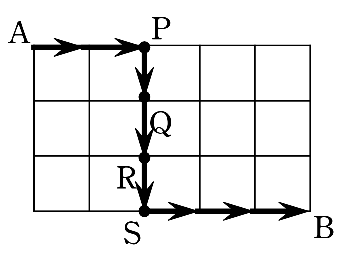
しかし，往路の最初の移動の向きと往路の最後の移動の向きが同じときは図２のようになり，図２上であれば往路の「→ 3 回，↓ 3 回」，図２下であれば往路の「→ 5 回，↓ 1 回」の移動は斜線部の中で引ける。しかし，この図形は往路を境界として左右または上下の 2 つの領域に分断され，復路をどのように選んでも少なくとも一度は往路で通った点を通らなければ点 A に戻れない。

【図２】



今回の問題では(3)の②の図に対して往路と同じ点を通らなければいけない理由を聞いているので，説明がきちんとされていればOKです。ただし，「通れないから」とか「ふさがれているから」ではダメです。正解とした答案のうちの１つは次のようなものです。

「復路で点 B から点 A に行くときに図中の点 P，Q，R，S のうち少なくとも一つの点を通らなければならないが，往路でこれらの点はすべて通っているので，P，Q，R，S のうち少なくとも一つの点を往路と復路で２回通ることになる。よって，同じ点を通らずに往路復路を引くことはできない」



その他のやり方としては背理法を使ったものもありました。(3)の得点率は 88.7 %でした。①②の高得点が効いていると思います。

(4)は (5, 2) 型通路の経路の個数をまず求めます。これは(1)と実質同じなので出来はよかったです。次に (5, 2) 型通路で往復で同じ点を通らない場合の数ですが，往路の A → B の行き方 21 通りのそれぞれに対して可能な復路が定まるので，基本的に場合分けするのが定番ではないかと思います。ただし，(3)で往復で同じ点を通らずにいける条件をちゃんと把握できると 10 通り調べればOKですし，対称性に気が付くとさらに半分の場合を調べればOKです。全部の場合をかかなくても (5, 2) 型であれば合計が何通りかは推測できるので，全部の図を描いていなくても考え方が正しければ正解にしました。ただし，式も説明もなく答えだけが正しい場合には減点しています。(4)の正解者は 43 名と全体の 24.3 %，得点率は 58.7 %でした。

(5)は (5, 3) 型で往路復路で同じ点を通らないものの個数を調べます。往路の数が全部で 56 通りなので，生徒の中で一人だけ 56 通りの図を描いて可能な復路の数を計算していた人がいました。残念ながら復路の数の計算が違っていて正解には至りませんでしたが考え方としては正攻法なので評価します。全部の場合でなくてもそれぞれの往路に対して可能な復路の数を調べた人については部分点をあげています。

実際に調べるのは同じ点を通らずに行ける 30 通りのうち対称性を使って 15 通り調べればいいのです。ただし， (5, 2) 型と違って単純にはいかないので一つ一つていねいに調べていかなければ正解にはたどり着けません。(5)に手を付けた人は全体の半分くらいで，そのうち最後までやって正解者は 4 名でした。 4 名の皆さんおめでとうございます。(5)の得点率は 25.8 %でした。 トータルで問題 1 が満点の人は 3 名でした。

さて，今回，問題 1 について 40 点満点だった 3 人に特別賞を出すことになりました。もちろんすべての問題について問題ごとに満点をとったら必ず特別賞を出すわけではありません。とはいえ一つの問題について特別賞を 3 人出すというのは異例のことです。もしこの 3 人の中でどれか一人を選ぶとしたらという議論も採点協議の中でありました。ただ今回採点していて感じたのは，特に今回大きく差がついた(5)において答は正しくても説明が不足していたり，(4)からの類推で答えだけを導いていた答案が多かった中できちんと答案を構成できていたこれらの答案はそれぞれ個性的でありながら優れていると感じたからです。

今回の問題 1 は最初の(1)こそ基本問題ですが，(5)ともなると考え方も複雑で結構時間もかかる問題ではなかったかと思います。皆さんがんばってくれました。

（市立札幌新川高等学校　佐々木　光憲）