問題４

袋の中には，白玉が m 個，赤玉が n 個，合計 $(m+n)$ 個の玉が入っている。ただし，m，n はともに０以上の整数とし，$m>n$ とする。この袋から無作為に１個ずつ玉を取り出して順番に並べる（取り出した玉は袋にもどさない）。この操作を，袋の中の玉がなくなるまで行う。１個ずつ玉を取りだすとき，以下の事象 A，事象 B，事象 C が起こる確率をそれぞれ $P_A(m,\ n)$，$P_B(m,\ n)$，$P_C(m,\ n)$ と 表す。

事象 A：	取り出された白玉の数が，最初から最後まで常に取り出された赤玉の数より多くなり続ける。
事象 B：	初めに取り出した玉が白玉で，かつ取り出された白玉の数と赤玉の数が等しくなることがある。
事象 C：	初めに取り出した玉が赤玉である。

たとえば，$m=2$，$n=1$ のときは次のようになる。

常に白玉の方が多くなる取り出し方は，白→白→赤 の順に取り出される場合しかないので，事象 A が起こる確率は，

$$P_A(2,\ 1)=\frac{1}{3}$$

初めに取り出した玉が白玉で，かつ白玉と赤玉の数が等しくなることがあるのは，白→赤→白 の順に取り出される場合しかないので，事象 B が起こる確率は，

$$P_B(2,\ 1)=\frac{1}{3}$$

次の各問いに答えなさい。

(1)　$P_A(3,\ 2)$，$P_B(3,\ 2)$，$P_C(3,\ 2)$ の値をそれぞれ求めなさい。

(2)　$P_A(7,\ 3)$，$P_B(7,\ 3)$，$P_C(7,\ 3)$ の値をそれぞれ求めなさい。

(3)　等式 $P_B(m,\ n)=P_C(m,\ n)$ が成り立つことを証明しなさい。

(4)　(3)の等式が正しいとき，$P_A(m,\ n)$ を m と n の式で表しなさい。

着眼点

選挙において，２人の候補者Ｍ，Ｎがそれぞれ m 票，n 票（ただし，$m>n$）を得票した。開票していく過程において，Ｍの得票数がＮの得票数を常に上回る確率をもとめるという，ジョセフ・ベルトラン(1822－1900)の投票問題が題材になっている。

(1)と(2)は，以下のように確率を求める問題である。

$$\text{確率 } P(A)=\frac{\text{事象 } A \text{ の起こる場合の数}}{\text{起こりうるすべての場合の数}}$$

確率を求める際，場合の数を考えるときには注意が必要である。２枚の硬貨を投げるときに (表，裏) と (裏，表) を区別することに代表されるように，一見同じに見えるものでも，物理的には別のものであると区別して求める必要がある。この問題の場合でも，本来，一つ一つの玉は同じ色でも異なるものとして区別すべきなのだが，その区別をせずに場合

の数を求めても，確率の分母と分子をともに同じ色の玉の入れ換え方で割ることになるだけなので，求める確率の値は変わらない。

この試行における3つの事象A，B，Cは，どの2つの事象も同時に起きることは絶対にない（すなわち，事象A，B，Cは互いに排反である）ということに気がついて欲しい。さらに，この試行において3つの事象A，B，C以外の事象はあり得ないということにも気がついて欲しい。これらのことを説明する記述があり，
$P_A(m,\ n)+P_B(m,\ n)+P_C(m,\ n)=1$であるということを利用して，求める3つの確率のうち2つを求めた後，残りを余事象の確率で求めても正解である。

(3)は，じっくり考え，証明を上手に記述できる力を求めている問題である。(3)の証明が不完全だとしても，(4)を正解することは可能である。しかし，(3)が解決しないままでは，(4)の結果はあくまでも推定でしかない。（「問題を正解すること」と「問題を解決すること」の違いを感じとって欲しい。）このように推定された一般式を証明する解決方法として，数学的帰納法を用いることがある。以下にその解答例を紹介する。

証明　$m>0$かつ$n=0$のとき，袋の中の玉はすべて白玉なので，$P_A(m,\ n)=1$である。

これは，$P_A(m,\ n)=\dfrac{m-0}{m+0}=1$であるから，推定された一般式を満たしている。

次に，$P_A(m,\ n-1)$と$P_A(m-1,\ n)$のいずれもが，推定された一般式を満たしていると仮定して，$P_A(m,\ n)$もまた，必ず推定された一般式を満たしていることを証明する。

白玉m個，赤玉n個，合計$(m+n)$個の玉が，事象Aを満たすための必要十分条件は，次の[1]，[2]のどちらかが成り立つことである。

[1]　最後に赤玉が出て，かつ，その直前までの白玉m個，赤玉$(n-1)$個の合計$(m+n-1)$個の玉が，事象Aを満たしている。

[2]　最後に白玉が出て，かつ，その直前までの白玉$(m-1)$個，赤玉n個の合計$(m+n-1)$個の玉が，事象Aを満たしている。

以上のことから，

$$
\begin{aligned}
P_A(m,\ n)&=\frac{n}{m+n}\cdot P_A(m,\ n-1)+\frac{m}{m+n}\cdot P_A(m-1,\ n)\\
&=\frac{n}{m+n}\cdot\frac{m-(n-1)}{m+(n-1)}+\frac{m}{m+n}\cdot\frac{(m-1)-n}{(m-1)+n}\\
&=\frac{n(m-n+1)}{(m+n)(m+n-1)}+\frac{m(m-n-1)}{(m+n)(m+n-1)}\\
&=\frac{mn-n^2+n+m^2-mn-m}{(m+n)(m+n-1)}\\
&=\frac{m^2-n^2-m+n}{(m+n)(m+n-1)}\\
&=\frac{(m-n)(m+n-1)}{(m+n)(m+n-1)}=\frac{m-n}{m+n}
\end{aligned}
$$

解答例

白玉をW，赤玉をRとする。

(1)　W 3 個とR 2 個の順列の総数は，$\dfrac{5!}{3!2!}=10$（通り）

事象 A の条件を満たす取り出し方は，WWWRR，WWRWR の 2 通りだから，

$$P_A(3,\ 2)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$$

事象 B の条件を満たす取り出し方は，WRWWR，WWRRW，WRWRW，WRRWWの 4 通りだから，

$$P_B(3,\ 2)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$$

事象 C の条件を満たす取り出し方は，最初に赤玉を取り出すため，2 個目以降の取り出し方はW 3 個とR 1 個の順列の総数に等しいので，$\dfrac{4!}{3!1!}=4$（通り）あるから，

$$P_C(3,\ 2)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$$

(2)　W 7 個とR 3 個の順列の総数は，$\dfrac{10!}{7!3!}=120$（通り）

事象 A の条件を満たす取り出し方は，

[1]　はじめの 6 個がWWRWRWの場合，7 個目以降の取り出し方はW 3 個とR 1 個の順列の総数に等しいので，$\dfrac{4!}{3!1!}=4$（通り）

[2]　はじめの 5 個がWWRWWの場合，6 個目以降の取り出し方はW 3 個とR 2 個の順列の総数に等しいので，$\dfrac{5!}{3!2!}=10$（通り）

[3]　はじめの 6 個がWWWRRWの場合，7 個目以降の取り出し方はW 3 個とR 1 個の順列の総数に等しいので，$\dfrac{4!}{3!1!}=4$（通り）

[4]　はじめの 5 個がWWWRWの場合，6 個目以降の取り出し方はW 3 個とR 2 個の順列の総数に等しいので，$\dfrac{5!}{3!2!}=10$（通り）

[5]　はじめの 4 個がWWWWの場合，5 個目以降の取り出し方はW 3 個とR 3 個の順列の総数に等しいので，$\dfrac{6!}{3!3!}=20$（通り）

[1]～[5]より，事象 A を満たす取り出し方の総数は $4+10+4+10+20=48$ 通りだから，$P_A(7,\ 3)=\dfrac{48}{120}=\dfrac{2}{5}$

事象Bの条件を満たす取り出し方は，

[1]　はじめの 2 個がWRの場合，3 個目以降の取り出し方はW 6 個とR 2 個の順列の総数に等しいので，$\dfrac{8!}{6!2!}=28$（通り）

[2]　はじめの4個がWWRRの場合，5個目以降の取り出し方はW5個とR1個の順列の総数に等しいので，$\dfrac{6!}{5!1!}=6$（通り）

[3]　[1]，[2]のほかは，WWWRRRWWWW，WWRWRRWWWWの2通り

[1]〜[3]より，事象 B を満たす取り出し方の総数は $28+6+2=36$ 通りだから，

$$P_B(7,\ 3)=\frac{36}{120}=\frac{3}{10}$$

事象Cの条件を満たす取り出し方は，最初に赤玉を取り出すため，2個目以降の取り出し方はW7個とR2個の順列の総数に等しいので，$\dfrac{9!}{7!2!}=36$ 通りあるから，

$$P_C(7,\ 3)=\frac{36}{120}=\frac{3}{10}$$

【注】(1)(2)については，3つの事象 A，B，C は互いに排反であり，

$P_A(m,\ n)+P_B(m,\ n)+P_C(m,\ n)=1$ であることから，求める3つの確率のうち2つを求めた後，残りを余事象の確率で求めてもよい。

(3)　事象 A の根元事象の要素の個数を $n(A)$ と表すことにする。

事象 B の要素に対して，白玉の数と赤玉の数が等しくなったところまでについてのみ，白玉を赤玉に，赤玉を白玉に入れかえるという操作を行うと，その列は一番初めが必ず赤玉になるので，事象 C の要素に属する。よって，$n(B)\leqq n(C)$ が成り立つ。

また，事象 C の要素は，一番初めが赤玉であり，条件 $m>n$ により，白玉の数の方が赤玉の数より多いので，取り出している途中で必ず取り出された白玉の数と赤玉の数が等しくなることがある。この白玉の数と赤玉の数が等しくなったところまでについてのみ，白玉を赤玉に，赤玉を白玉に入れかえるという操作を行うと，その列は一番初めが必ず白玉になるので，事象 B の要素に属する。よって，$n(B)\geqq n(C)$ が成り立つ。

以上により，$n(B)=n(C)$ が成り立つので，$P_B(m,\ n)=P_C(m,\ n)$ が成り立つ。

(4)　W m 個とR n 個の順列の総数は，$\dfrac{(m+n)!}{m!n!}$ 通り。

事象 C は，最初に取り出した玉が赤玉であればよいから，2個目以降の取り出し方はW m 個とR $(n-1)$ 個の順列の総数に等しいので，$\dfrac{(m+n-1)!}{m!(n-1)!}$ 通り。

$$\text{よって，}\quad P_C(m,\ n)=\frac{\dfrac{(m+n-1)!}{m!(n-1)!}}{\dfrac{(m+n)!}{m!n!}}=\frac{\dfrac{(m+n-1)!}{m!(n-1)!}\cdot m!n!}{\dfrac{(m+n)!}{m!n!}\cdot m!n!}=\frac{n}{m+n}$$

(3)より，$P_B(m,\ n)=P_C(m,\ n)$ であり，事象 B と事象 C は互いに排反だから，

$$P_A(m,\ n)=1-\{P_B(m,\ n)+P_C(m,\ n)\}$$
$$=1-2\cdot\frac{n}{m+n}=\frac{m+n}{m+n}-\frac{2n}{m+n}=\frac{m-n}{m+n}$$

配点　(1)　$P_A(3,\ 2)$ 3点，$P_B(3,\ 2)$ 3点，$P_C(3,\ 2)$ 2点

(2)　$P_A(7,\ 3)$ 4点，$P_B(7,\ 3)$ 4点，$P_C(7,\ 3)$ 3点

(3)　12点　(4)　9点

講評

(1)，(2)は各事象 A，B，C の内容をしっかり読み取り，条件を満たす場合の数を考えながら確率を求める問題です。問題1で最短経路に関する出題があったからか，「白が出る」を「→」，「赤が出る」を「↑」として経路図をかいて解いてくれた生徒も数名いました。

一般に，答えのみでよいと指示されない限り，${}_n\mathrm{P}_r$ や ${}_n\mathrm{C}_r$，階乗等を使った数式，考え方を説明する記述，もしくは具体的に該当する場合をかき挙げ，途中計算と共に答えを書かなければ正解とは見なされません。顔の知らない人に読んでもらっても伝わるよう，上手に解答を記述できる力を身につけてください。そのためには，今回のコンテストや全国模試など正式な場面に限らず，普段の学習から常にこの事を意識した記述を行うことが不可欠です。また，(3)の一般式の証明が（出来ていないのに）既に完了しているという前提で，(1) (2)を求めるのに，それを利用したのではないかと疑われてもしかたがない，説明不十分な解答の生徒も見られました。

すばらしい事に，北海道の各地区のいわゆる進学校といわれる高校の生徒の中には，この正解と見なされない解答や，疑われてもしかたがない説明不十分な解答を書いてきた生徒は一人もいませんでした。

(3)の証明は，$P_B(m,\ n)$ を真正面から素直に m と n の一般式で表そうとすると壁にぶち当たります。その壁がどんな壁なのかを一緒に確認してみましょう。白玉をW，赤玉をRと書くことにします。

$2k$ 個目の玉を取り出したとき初めて，取り出された白玉の数と赤玉の数が等しくなる確率を P_k とおくと，

$k=1$ のとき，取り出された玉は，1個目からWRとなればよいから，

$$P_1=\frac{m}{m+n}\cdot\frac{n}{m+n-1}\quad \text{もしくは}\quad P_1=\frac{(m+n-2)!}{(m-1)!(n-1)!}\cdot\frac{m!n!}{(m+n)!}$$

もしくは　$P_1=\dfrac{{}_{m+n-1}\mathrm{C}_{n-1}}{{}_{m+n}\mathrm{C}_n}$

$k=2$ のとき，1個目からWWRRとなればよいから，

$$P_2=\frac{m}{m+n}\cdot\frac{m-1}{m+n-1}\cdot\frac{n}{m+n-2}\cdot\frac{n-1}{m+n-3}=\frac{{}_m\mathrm{P}_2\cdot{}_n\mathrm{P}_2}{{}_{m+n}\mathrm{P}_4}$$

もしくは　$P_2=\dfrac{(m+n-4)!}{(m-2)!(n-2)!}\cdot\dfrac{m!n!}{(m+n)!}$　もしくは　$P_2=\dfrac{{}_{m+n-4}\mathrm{C}_{n-2}}{{}_{m+n}\mathrm{C}_n}$

$k=3$ のとき，WWRWRRまたはWWWRRRの2通りあるから，

$$P_3=\frac{{}_m\mathrm{P}_3\cdot{}_n\mathrm{P}_3}{{}_{m+n}\mathrm{P}_6}\cdot 2\quad \text{もしくは}\quad P_3=\frac{(m+n-6)!}{(m-3)!(n-3)!}\cdot\frac{m!n!}{(m+n)!}\cdot 2$$

もしくは　$P_3=\dfrac{{}_{m+n-6}\mathrm{C}_{n-3}}{{}_{m+n}\mathrm{C}_n}\cdot 2$

$k=4$ のとき，WWRWRWRR，WWRWWRRR，WWWRRWRR，WWWRWRRR，WWWWRRRRの５通りだから，

$$P_4=\frac{{}_m\mathrm{P}_4\cdot{}_n\mathrm{P}_4}{{}_{m+n}\mathrm{P}_8}\cdot 5\quad \text{もしくは}\quad P_4=\frac{(m+n-8)!}{(m-4)!(n-4)!}\cdot\frac{m!n!}{(m+n)!}\cdot 5$$

もしくは　$P_4=\dfrac{{}_{m+n-8}\mathrm{C}_{n-4}}{{}_{m+n}\mathrm{C}_n}\cdot 5$

$2k$ 個で初めて白玉と赤玉が等しくなるときの，白玉 k 個と赤玉 k 個の順列の総数を x_k とおくと，

$$P_B(m,\ n)=P_1+P_2+P_3+\cdots+P_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{{}_m\mathrm{P}_k\cdot{}_n\mathrm{P}_k}{{}_{m+n}\mathrm{P}_{2k}}\cdot x_k$$

となり，数列 $\{x_k\}$ は $\{1,\ 1,\ 2,\ 5,\ \cdots\}$ となります。

ちなみに，$x_5=14$，$x_6=42$ となり，にわかには求めることが困難です。

そこで，まったく別のアプローチを考えてみます。そもそも事象 B と事象 C とはどんな事象なのでしょうか。

$m>n$ より，事象 C は，必ず白玉と赤玉の数が等しくなることがある。すなわち，事象 B と事象 C の共通点は，どちらも必ず白玉と赤玉の数が等しくなることがある。このことに気づいて書いてくれた生徒が３名いました。このアプローチから，感覚的には事象 B の場合の数と事象 C の場合の数が等しいのではないかと気づいた生徒は，ほかにも沢山いたかもしれません。しかし，その感覚を，いかに論理的で，かつ誰が読んでも明確に納得できる記述で表現出来るか。この問題では，その表現力が問われました。学習分野としては「集合と論理」になると思いますが，この「集合と論理」を基盤とした表現力が，未解決問題を解決へと導いてくれる。そんな例題の一つとして，読み取ってくれたら幸いです。

(4)は，(3)の等式が成り立つことを使えば，$P_A(m,\ n)$ を m と n の式で表すことができることを説明してもらう問題でした。$P_C(m,\ n)=\dfrac{n}{m+n}$，事象 A，B，C は互いに排反，$P_A(m,\ n)+P_B(m,\ n)+P_C(m,\ n)=1$ などの記述が必要ですが，(3)や(1)，(2)でその一部を既に記述している場合も部分点として得点を与えています。また，$P_A(m,\ n)$ を簡潔な式にまとめるときも，途中計算式が必要になります。顔の知らない人に読んでもらっても伝わるよう，上手に解答を記述できる力を身につけてください。

（北海道恵庭北高等学校　　木村　尚士）