

**問題 5**

$$\frac{9}{31} = \frac{1}{3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{4}}}$$

の右辺のように、分子にはすべて1が入る、はしご状の分数での表

し方を  $\frac{9}{31}$  の連分数展開といい、 $[3, 2, 4]$  と表記する。また、 $[1, 2, 3, 1, 2, 3, \dots]$  のように、一部の数が循環して現れるとき、循環小数と同じように  $[\dot{1}, 2, \dot{3}]$  と表し、循環連分数と呼ぶことにする。

たとえば、連分数展開が  $[\dot{2}]$  となる数  $x$  は、方程式  $x = \frac{1}{2+x}$  を解くことにより求めることができる。

- (1) 連分数展開が  $[\dot{2}]$ ,  $[\dot{1}, \dot{2}]$ ,  $[\dot{2}, \dot{1}]$  となる数を求めなさい。
- (2) 循環連分数は、ある整数係数の2次方程式の正の解となることを示しなさい。
- (3)  $a, b$  を異なる自然数とし、 $\alpha$  を  $[\dot{a}, \dot{b}]$  で表される数とする。また、 $\alpha'$  を  $\alpha$  を解とする整数係数の2次方程式のもう一つの解とするとき、 $[\dot{b}, \dot{a}]$  で表される数を  $\alpha'$  を用いて表しなさい。
- (4)  $a, b, c$  をすべてが等しくならないような自然数とする。このとき、 $[\dot{c}, b, \dot{a}]$  で表される数における根号の中の式は、 $a, b, c$  を全部または一部を入れ替えても変わらないことを示しなさい。
- (5)  $a, b, c, d, e$  をすべてが等しくならないような自然数とする。このとき、 $[\dot{e}, d, c, b, \dot{a}]$  で表される数の根号の中の数を  $a, b, c, d, e$  で表しなさい。また、この式が変わらないような  $a, b, c, d, e$  の入れ替え（全部または一部でもよい）はどのようなものか説明しなさい。必要があれば次の正五角形を用いてもよい。

