

配点

- (1) 3点(完全解答) (2) 5点(完全解答) (3) 5点 (4) 7点
(5) 10点 (6) 10点

講評

問題文は難しそうに書いているけれど、問題文の内容自体はそんなに難しいことを述べていないのでとっつきやすい問題だったかもしれません。多くの人が想像以上の得点が取れていました。

(1), (2)についてはほとんどの人ができていました。

(3)もかなりの人ができてはいました。ただ単に答えのみを書いてくれた人も数人いましたが、多くの人はその考え方のプロセスまできちんと書いてくれました。

(4)について、証明すべきことの必要十分性があいまいな答案が見受けられました。つまり、「すべての自然数 n に対して $F(n)=F(n+1)$ が成り立つのは

$f(1)=f(2)=f(3)=f(4)=0$ の時に限る」ということの証明を書くには、

① $f(1)=f(2)=f(3)=f(4)=0$ の時は $F(n)=F(n+1)$ が成り立つこと

② $F(n)=F(n+1)$ が成り立つとするとかならず $f(1)=f(2)=f(3)=f(4)=0$ となることの両方の主張について触れられなければなりません。一方だけしか書いていなかった証明も散見されました。

次に、②の証明の答案を見てみると、まず $f(1)=f(2)=f(3)=f(4)$ ($=d$ とおく) を証明し、 $f(5)\equiv 4d \pmod{10}$ を導き出します。仮定から $4d\equiv d \pmod{10}$ となります。このことからいきなり $d=0$ と結論付けた答案と、丁寧に $d=0, 1, 2, \dots, 8, 9$ についてきちんと計算してくれて $d=0$ を導いた答案がありました。もちろん後者のほうがより好感が持てました。

(5)はちょっと難しかったかもしれませんね。白紙の答案も多くみられました。正解した人、またはかなりいい線までいった人も多く、鳩の巣原理を使うことに気づいたことは立派だと思います。

(6)も白紙の答案が多くみられました。なかには「4桁以下の整数が無限にあるのだから4837になるものもある」という乱暴な答案(まあ、気持ちはわからないでもないが)、「自明である」という答案(キミは神様か!)、実際に $F(1)$ から順に書き下していた答案(おつかれさま)もありました。書き下した答案の最高記録は $n=351$ まで書いてみたものもありました(残念ながら $n=47$ から間違っていました)。さらに書き下した答案の中には、 $n=147$ で4837になり、満足げに「題意は示された」と締めくくったものもありましたが、 $n=83$ で間違っていました。

正解者は解答例のように2021の4つ前が4837であることに気づいた答案で、しかも証明の道筋をきちんと書いてくれました。

全体的に、多くの場合分けをしようとして挫折してしまった答案、いろいろな記号を導入しすぎて何が何だか分からなくなった答案など混乱した答案もありました。しかし、皆さんの答案に感心することが多く、私の解答例よりもすっきりと書けているものも多く見

受けられました。おかげでとても楽しく採点することができました。どうもありがとうございました。

(札幌静修高等学校 杉本 幸司)