

## 着眼点

数学とは、本来、自由な学問です。

数学の問題（大学入試や模擬試験を含む）では、しばしば「〇〇を用いて求めよ」とか「□□を用いて証明せよ」という問題を見かけます。難しくても手も足も出ないような問題ではそういった“誘導”が必要で、“誘導”があればありがたいと思いますが、この“誘導”は解答者に親切なようであり、実は、自由な発想を妨げる“余計なおせっかい”ではないだろうかと思うのです。解く（証明する）ために、何を用いればよいのかを考えることこそが数学だと思いませんか。

本問は色々なアプローチが可能です。創始以来40年近く続いている北海道高等学校数学コンテストでは、これまで、(1)で求めたことを用いたりヒントにしたりして(2)を解くとか、(1)(2)で求めたことをヒントにして(3)を証明するとか、“誘導”付きの問題形態が多くとられてきましたが、本問はあえて“誘導”をせずに、出題しました。

数学Ⅱや数学Bを履修していない生徒には難しいかもしれませんが、解答例を数パターン示します。しかし、これらの方法以外でも証明できる問題です。むしろここに提示した証明よりももっと鮮やかな証明もあるでしょう。コンテスト参加生徒の皆さんがどのように証明するかを楽しみにしています。

## 証明

三平方の定理により、

$$AC^2 + BD^2 = AP^2 + CP^2 + BP^2 + DP^2$$

ABの中点をMとすると、 $AM = BM$ であり、

ア)  $AP = AM - PM$ ,  $BP = BM + PM = AM + PM$

イ)  $AP = AM + PM$ ,  $BP = BM - PM = AM - PM$

のいずれかが成り立つ。

ア、イのいずれの場合も、

$$AP^2 + BP^2 = (AM - PM)^2 + (AM + PM)^2 = 2(AM^2 + PM^2)$$

が成り立つ。（PがMと一致する場合は $PM = 0$ とする。）

同様に、CDの中点をNとすると、

$$CP^2 + DP^2 = (CN - PN)^2 + (DN + PN)^2 = 2(CN^2 + PN^2)$$

が成り立つ。（PがNと一致する場合は $PN = 0$ とする。）

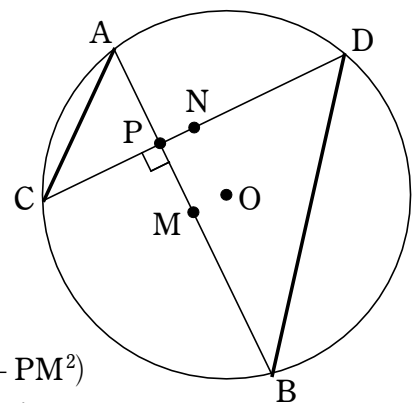
ここで、 $OM \perp AB$ ,  $ON \perp CD$ であることから、三平方の定理により

$$AM^2 = OA^2 - OM^2 = r^2 - OM^2, \quad CN^2 = OC^2 - ON^2 = r^2 - ON^2$$

である（MがOと一致する場合は $OM = 0$ とする。Nも同様。）から、

$$\begin{aligned} AC^2 + BD^2 &= AP^2 + CP^2 + BP^2 + DP^2 \\ &= (AP^2 + BP^2) + (CP^2 + DP^2) \\ &= 2(AM^2 + PM^2) + 2(CN^2 + PN^2) \\ &= 2\{(AM^2 + PN^2) + (CN^2 + PM^2)\} \end{aligned}$$

$\angle OMP = \angle ONP = \angle MPN = 90^\circ$ より四角形OMP Nが長方形になることから



$$PM = ON, \quad PN = OM$$

が得られるので

$$\begin{aligned} AC^2 + BD^2 &= 2\{(AM^2 + OM^2) + (CN^2 + ON^2)\} \\ &= 2(OA^2 + OC^2) = 2(r^2 + r^2) = 4r^2 \end{aligned}$$

ゆえに、 $AC^2 + BD^2$  の値は一定である。

【証明】(三角比を用いる)

$$\triangle ABC = \theta \text{ とおくと, } \angle APC = 2\angle ABC = 2\theta$$

$\triangle BCP$  に着目すると

$$\begin{aligned} \angle BCP &= 180^\circ - (\angle BPC + \angle PBC) \\ &= 180^\circ - (90^\circ + \theta) = 90^\circ - \theta \end{aligned}$$

よって、

$$\angle BOD = 2\angle BCP = 2(90^\circ - \theta) = 180^\circ - 2\theta$$

$\triangle ACO$  に余弦定理を用いて

$$\begin{aligned} AC^2 &= OA^2 + OC^2 - 2OA \cdot OC \cos \angle AOC \\ &= r^2 + r^2 - 2 \cdot r \cdot r \cdot \cos 2\theta = 2r^2 - 2r^2 \cos 2\theta \end{aligned}$$

$\triangle BDO$  に余弦定理を用いて

$$\begin{aligned} BD^2 &= OB^2 + OD^2 - 2OB \cdot OD \cos \angle BOD \\ &= r^2 + r^2 - 2 \cdot r \cdot r \cdot \cos(180^\circ - 2\theta) = 2r^2 - 2r^2 \cdot (-\cos 2\theta) = 2r^2 + 2r^2 \cos 2\theta \end{aligned}$$

したがって、

$$AC^2 + BD^2 = (2r^2 - 2r^2 \cos 2\theta) + (2r^2 + 2r^2 \cos 2\theta) = 4r^2$$

ゆえに、 $AC^2 + BD^2$  の値は一定である。

【証明】(ベクトルを用いる)

$$\begin{aligned} AC^2 + BD^2 &= |\vec{AC}|^2 + |\vec{BD}|^2 \\ &= |\vec{OC} - \vec{OA}|^2 + |\vec{OD} - \vec{OB}|^2 \\ &= |\vec{OC}|^2 - 2\vec{OA} \cdot \vec{OC} + |\vec{OA}|^2 + |\vec{OD}|^2 - 2\vec{OB} \cdot \vec{OD} + |\vec{OB}|^2 \end{aligned}$$

$|\vec{OA}| = |\vec{OB}| = |\vec{OC}| = |\vec{OD}| = r$  であるから

$$\begin{aligned} AC^2 + BD^2 &= 4r^2 - 2(\vec{OA} \cdot \vec{OC} + \vec{OB} \cdot \vec{OD}) \\ &= 4r^2 - 2(|\vec{OA}||\vec{OC}|\cos \angle AOC + |\vec{OB}||\vec{OD}|\cos \angle BOD) \\ &= 4r^2 - 2(r^2 \cos \angle AOC + r^2 \cos \angle BOD) \\ &= 4r^2 - 2r^2(\cos \angle AOC + \cos \angle BOD) \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

ここで、中心角と円周角の性質により

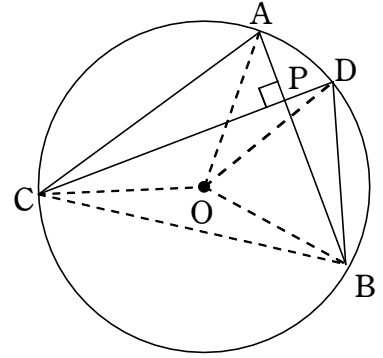
$$\angle AOC = 2\angle ABC, \quad \angle BOD = 2\angle BCD$$

であり、 $\triangle BPC$  に着目すると

$$\angle ABC = 180^\circ - (\angle BPC + \angle BCD) = 180^\circ - (90^\circ + \angle BCD) = 90^\circ - \angle BCD$$

となるので、

$$\cos \angle AOC = \cos 2\angle ABC = \cos 2(90^\circ - \angle BCD) = \cos(180^\circ - 2\angle BCD)$$



$$= -\cos 2\angle BCD = -\cos \angle BOD$$

であるから、①より

$$AC^2 + BD^2 = 4r^2$$

ゆえに、 $AC^2 + BD^2$  の値は一定である。

**証明** (座標を用いる)

原点を中心とし、 $AB$  を  $x$  軸と直交するように、 $CD$  を  $y$  軸と直交するようにしても、一般性は失われない。

$A, B$  は  $x$  軸に関して対称なので

$$A(a, b), B(a, -b)$$

$C, D$  は  $y$  軸に関して対称なので

$$C(c, d), D(-c, d)$$

と表すことができ、 $A, B, C, D$  は原点が中心、半径  $r$  の円周上の点であるから

$$a^2 + b^2 = r^2, \quad c^2 + d^2 = r^2$$

が成り立つ。

このとき、

$$\begin{aligned} AC^2 + BD^2 &= \{(c-a)^2 + (d-b)^2\} + \{(-c-a)^2 + \{d-(-b)\}^2\} \\ &= c^2 - 2ac + a^2 + d^2 - 2bd + b^2 + c^2 + 2ac + a^2 + d^2 + 2bd + b^2 \\ &= 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 2d^2 \\ &= 2(a^2 + b^2) + 2(c^2 + d^2) = 2r^2 + 2r^2 = 4r^2 \end{aligned}$$

ゆえに、 $AC^2 + BD^2$  の値は一定である。

