着眼点

1対1で勝負をするとき順位を決める方法はいろいろあります。有名なものはリーグ戦とトーナメントでしょう。この問題はトーナメントで順位を決める時，正しい順位（実力差が反映された順位）になるのはどのくらいか考えてみましょうという問題です。

(1)　1と2のように「同じブロックにいてはいけないものを遠い位置に置く」という視点で考えると見えてきます。このような場合はたくさんありますが，具体例を一つ作ってみてください。

(2)　人を主役にして1人あたり何回試合をしなければならないのかという視点で考えると見えてきます。ダブりがないように $\frac{1}{2}$ にすることを忘れないようにしましょう。

(3)　$N\left(x,\ \frac{x+y-1}{2}\right)=N\left(\frac{x+y+1}{2},\ y\right)$ がどういう意味を表しているのか考えてみるとわかります。よーく考えるとあたりまえのことですよね。

(4)　$N\left(x,\ \frac{x+y-1}{2}\right)$ が勝つ人の場合の数，$N\left(\frac{x+y+1}{2},\ y\right)$ が負けた人の場合の数を表していることに気が付くと，あとは左か右かの議論をするだけだということに気が付きます。ここから $N(1,\ 2^n)$ と $N(1,\ 2^{n+1})$ の関係式を作り，あとはどんどん代入していくだけです。

解答例

(1)　例

第1	試合	第2	試合	第3	試合	第4	試合
1	5	3	7	2	6	4	8

(2)　2^n 人の人が勝ち負けによって 2^{n-1} 人ずつのグループに分かれて試合を行うことになるので，順位が決定するまでに1人あたり n 回の試合を行うことになる。

人数は 2^n 人で，2人で1試合行うことを考えると，全試合数は

$$n\times 2^n\times\frac{1}{2}=n\cdot 2^{n-1}$$

(3)　最終的な順位と番号が一致するためには第 x 位から第 $\frac{x+y-1}{2}$ 位を決めるグループには x から $\frac{x+y-1}{2}$ の連続した番号が存在し，第 $\frac{x+y+1}{2}$ 位から第 y 位を決めるグループには $\frac{x+y+1}{2}$ から y の連続した番号が存在している。

ここで，$\frac{x+y+1}{2}$ から y の連続した番号それぞれに $\frac{x-y-1}{2}$ を足すと，x から $\frac{x+y-1}{2}$ の連続した番号と一致する。したがって，第 x 位から第 $\frac{x+y-1}{2}$ 位を決めるグループと第 $\frac{x+y+1}{2}$ 位から第 y 位を決めるグループは同じことを表している。

ゆえに，$N\left(x,\ \frac{x+y-1}{2}\right)=N\left(\frac{x+y+1}{2},\ y\right)$ である。

(4)　第1位から第 2^{n+1} 位を決めるグループは勝ち負けによって第1位から第 2^n 位を決めるグループと，第 2^n+1 位から第 2^{n+1} 位を決めるグループに分かれ，同一試合で順番があることを考えると，

$$N(1,\ 2^{n+1})=2^{2^n}\times N(1,\ 2^n)\times N(1+2^n,\ 2^{n+1})$$

が成り立つ。

$x=1$，$y=2^{n+1}$ のとき，(3)より，$N(1,\ 2^n)=N(1+2^n,\ 2^{n+1})$ が成り立つから，

$$N(1,\ 2^{n+1})=2^{2^n}\times\{N(1,\ 2^n)\}^2$$

が成り立つ。

$N(1,\ 2)=2$ から，

$$N(1,\ 2^2)=2^2\times\{N(1,\ 2)\}^2=2^2\times 2^2$$

$$N(1,\ 2^3)=2^{2^2}\times(2^2\times 2^2)^2=2^{2^2}\times 2^{2^2}\times 2^{2^2}$$

$$N(1,\ 2^4)=2^{2^3}\times\left(2^{2^2}\times 2^{2^2}\times 2^{2^2}\right)^2=2^{2^3}\times 2^{2^3}\times 2^{2^3}\times 2^{2^3}$$

以下，同様に繰り返して，

$$N(1,\ 2^n)=2^{2^{n-1}}\times 2^{2^{n-1}}\times\cdots\cdots\times 2^{2^{n-1}}=2^{n\cdot 2^{n-1}}$$