

## 配点

- (1) 16点 (各4点)
- (2) 17点 ( $c$ の値を求めて10点,  $g(-x) = -g(x)$ を示して7点)
- (3) 7点

## 講評

- (1) 次のことが気になりました。

①計算過程や説明がない答案が多数ありました。

答えがあっても0点にしました。逆に答えが間違っても途中までの解答に対して点数を与えました。

②雑な答案がありました。

メモ書きのような雑な解答がありました。答案は丁寧に書いてください。採点者が読めないと、点数にならないことがあります。採点者に読んでもらえるような解答作成を心掛けてください。

③  $f(x) = 1 - x$ に気が付いたことはすばらしいが、 $f(x) = 1 - x$ として解答することはだめです。

④(2)の  $c$ を求める解答について

多くの受験生が次のような解答を書いていました

$$g(x) = f(x) + c \text{に } x=1 \text{を代入すると,}$$

$$g(1) = f(1) + c = 0 + c = c$$

$$g(-1) = f(-1) + c = 2 + c$$

$$\text{ここで, } g(-x) = -g(x) \text{のとき, } 2 + c = -c$$

よって,  $c = -1$ である。

この解答には減点をしました。

つまり, 特定の  $x$ の値に対する  $c$ の値なので減点対象と考えました。

すべての  $x$ に対して  $c$ の値が他に存在しないのかということになる。

- (1)  $f(x)$ が微分可能であれば次のように求めることができます。

(I)の関係式を  $x$ で微分すると ( $y$ を定数とみる)

$$\{1 - f(y)\} \frac{1}{y} f' \left( \frac{x}{y} \right) = f'(x)$$

$$\text{ここで, } y \text{を } x \text{とすると, } \{1 - f(x)\} \frac{1}{x} f'(1) = f'(x)$$

$$f'(1) = c \text{とおくと, } \{1 - f(x)\} \frac{c}{x} = f'(x)$$

$$f(x) \text{は定数関数ではないので, } f(x) - 1 \neq 0$$

$$\frac{f'(x)}{1 - f(x)} = \frac{c}{x}$$

$$\text{両辺を } x \text{で積分すると, } -\log|1 - f(x)| = c \log|x| + c'$$

ゆえに,  $f(x) = Ax + 1$  ( $A$ は定数)

$$f(1) = A + 1 = 0 \text{ なので、 } A = -1$$

$$\text{よって、 } f(x) = -x + 1$$

(3) 関数方程式を勉強してください。

0点の受験生が88名でした。おそらく、その受験生は関数方程式を勉強したことがないと予想しています。数学コンテストではよく出題され、数学オリンピックや大学入試問題でもときどき見かけます。関数方程式の問題は、微分可能という条件があれば、上記の(2)のように微分方程式をつくり、関数を決定することができます。しかし、微分可能の条件がなければ、関数を決定することは難しいです。数学コンテストの出題範囲に数学Ⅲがないので、本問のように微分可能の条件がなく、 $f(x)$ の $x$ に色々な値を代入したり、与えられた条件からうまい変形を見つけたり、関数であること（1つの $x$ の値が1つの $f(x)$ の値に対応する）等を考え、問題を解いていきます。そのうち、関数 $f(x)$ の式が見えてくることがあります。 $f(x)$ が分かると、問題は解きやすくなるはりますが、あくまでも仮定なので、その式を使って解答することはできません。関数方程式になれていない生徒は、簡単な問題から訓練し、過去の数学コンテストの問題や大学入試問題で演習して、得意分野の1つにしてほしいところです。

(北海道札幌西陵高等学校 大和 達也)