$\boxed{\text{着眼点}}$

(1)～(3)　$x$，$y$，$z$ に $0$，$1$，$-1$ 等を代入するが，条件(Ⅱ)をつかう。

(4)　$F(x)$ は $f(x)$ の 2 次関数となる。

(5)　$G(x,\ y)$ は $f(x)$ の 1 次関数となる。

(6)　$H(x,\ y)$ は $f(y)$ の 1 次関数となる。

$f(x)=x-1$ として作問した。

$\boxed{\text{解答例}}$

(1)　(Ⅰ)に $y=z=0$ を代入すると

$$f(0)=f(x)\{f(0)\}^2+f(x)f(0)+\{f(0)\}^2+f(0)f(x)+f(x)+f(0)+f(0)$$

$$\{f(x)+1\}\{f(0)\}^2+\{f(x)+1\}f(0)+f(x)=0$$

$$\{(f(x)+1)f(0)+f(x)\}\{f(0)+1\}=0$$

$$(f(x)+1)f(0)+f(x)=0 \quad \text{または} \quad f(0)+1=0$$

$f(0)\fallingdotseq -1$ とすると，$(f(x)+1)f(0)+f(x)=0$ より，$f(x)=\dfrac{-f(0)}{f(0)+1}$

ここで，条件(Ⅱ)より関数 $f(x)$ は定数関数でない，すなわち，$f(x)=\dfrac{-f(0)}{f(0)+1}$ は定数関数となるので，$f(0)\fallingdotseq -1$ は不適。

よって，$f(0)=-1$

(2)　(Ⅱ)に $x=y=z=1$ を代入すると

$$f(1)=\{f(1)\}^3+3\{f(1)\}^2+3f(1)$$

$$\{f(1)\}^3+3\{f(1)\}^2+2f(1)=0$$

$$f(1)\{f(1)+1\}\{f(1)+2\}=0$$

$$f(1)=0,\ -1,\ -2$$

(Ⅱ)より，$0<1$ のとき $f(0)<f(1)$，すなわち，$f(1)>-1$

よって，$f(1)=0$

(3)　(Ⅱ)に $x=1$，$y=z=-1$ を代入すると

$$f(1)=f(1)\{f(-1)\}^2+f(1)f(-1)+\{f(-1)\}^2+f(-1)f(1)+f(1)+f(-1)+f(-1)$$

(2)より $f(1)=0$ なので

$$\{f(-1)\}^2+2f(-1)=0$$

$$f(-1)=0,\ -2$$

(Ⅱ)より，$-1<0$ のとき $f(-1)<f(0)$，すなわち，$f(-1)<-1$

よって，$f(-1)=-2$

$\boxed{\text{別解１}}$　(1)～(3)

$a=-1,\ 0,\ 1$ は $a^3=a$ を満たすので，(Ⅰ)より $x=y=z=a$ を代入すると

$$f(a^3)=\{f(a)\}^2+3\{f(a)\}+3f(a)$$

$f(a^3)=f(a)$ なので，

$$\{f(a)\}^3+3\{f(a)\}^2+2f(a)=0$$

$f(a)\{f(a)+1\}\{f(a)+2\}=0$

$f(a)=0,\ -1,\ -2$

(Ⅱ)より， $f(-1)=-2$， $f(0)=-1$， $f(1)=0$

$\boxed{別解２}$　条件(Ⅰ)を次のように変形する。

$f(xyz)+1=\{f(x)+1\}\{f(y)+1\}\{f(z)+1\}$　…①

(1)　①に $x=0$ を代入すると，

$f(0)+1=\{f(0)+1\}\{f(y)+1\}\{f(z)+1\}$

ここで， $f(0)\neq-1$ とすると

$\{f(y)+1\}\{f(z)+1\}=1$

ゆえに， $f(y)+1=\dfrac{1}{f(z)+1}$

これは， $y$ と $z$ の任意性から $f(z)+1$ が定数関数となり， 条件(Ⅱ)より不適。

よって， $f(0)=-1$

(2)(3)　$a=\pm1$ として， $x=y=a$ とすると，①より

$f(z)+1=\{f(a)+1\}\{f(z)+1\}$

ここで， 条件(Ⅱ)より，すべての実数 $z$ に対して $f(x)+1\neq0$

ゆえに，$\{f(a)+1\}^2=1$

$f(a)=0$， $-2$

条件(Ⅱ)より， $f(-1)=-2$， $f(1)=0$

(4)　(Ⅰ)に $y=x$， $z=1$ とすると，

$f(x^2)=f(x)f(x)f(1)+f(x)f(x)+f(x)f(1)+f(1)f(x)+f(x)+f(x)+f(1)$

$f(1)=0$ なので，

$f(x^2)=\{f(x)\}^2+2f(x)$

よって， $F(x)=\{f(x)\}^2-2f(x)$

ここで， $-1\leqq x\leqq1$ より，(Ⅱ)から $f(-1)\leqq f(x)\leqq f(1)$

ゆえに， $-2\leqq f(x)\leqq0$

$F(x)=\{f(x)-1\}^2-1$

よって， $f(x)=0$ すなわち $x=1$ のとき最小値 0

$f(x)=-2$ すなわち $x=-1$ のとき最大値 8

$\boxed{別解}$　条件(Ⅱ)より， $f(x)$ は増加関数である。

$-1\leqq x\leqq1$ のとき， $0\leqq x^2\leqq1$ となり

このとき， $-1\leqq f(x^2)\leqq0$， $0\leqq-4f(x)\leqq8$

さらに， $f(x^2)$ と $-4f(x)$ の増減は，

$-1\leqq x\leqq0$ のとき， $f(x^2)$ の値は 0 から $-1$ へ減少

$-4f(x)$ の値は 8 から 4 へ減少

$0\leqq x\leqq1$ のとき， $f(x^2)$ の値は $-1$ から 0 へ増加

$-4f(x)$ の値は 4 から 0 へ減少

よって，以上より， $F(x)$ は $x=-1$ のとき最大値 8， $x=1$ のとき最小値 0

(5) (Ⅱ)に $z=1$ を代入すると

$$f(xy)=f(x)f(y)f(z)+f(x)f(y)+f(y)f(1)+f(1)f(x)+f(x)+f(y)+f(1)$$

$f(1)=0$ なので

$$f(xy)=f(x)f(y)+f(x)+f(y)$$

よって， $G(x,\ y)=f(x)f(y)-3f(x)+f(y)$

$\qquad\qquad =\{f(y)-3\}f(x)+f(y)$

$-1\leqq x\leqq 1$， $-1\leqq y\leqq 1$ より， $-2\leqq f(x)\leqq 0$， $-2\leqq f(y)\leqq 0$

ここで， $f(y)$ が定数， $f(x)$ が変数とみたとき，

$\{f(y)-3\}f(x)+f(y)$ の傾きが $f(y)-3<0$ なので，単調に減少する 1 次関数である。

最大となるのは， $f(x)=-2$ のとき，すなわち $x=-1$

このとき $G(-1,\ y)=6-f(y)$

よって， $f(y)=-2$ のとき，すなわち $y=-1$ のとき，最大値 8

同様に， $x=1$， $y=-1$ のとき最小値 $-2$ である。

$\boxed{\text{別解}}$ $\qquad -4f(x)$ の値は 4 から 0 へ減少

よって以上より， $F(x)$ は $x=-1$ のとき最大値 8， $x=1$ のとき最小値 0

（5） $-1\leqq x\leqq 1$， $-1\leqq y\leqq 1$ のとき， $-1\leqq xy\leqq 1$ なので，

$-2\leqq f(xy)\leqq 0$， $0\leqq -4f(x)\leqq 8$ となり，

$-4f(x)=8$ となるのは $x=-1$ のとき、

このとき， $f(xy)=f(-y)$ が最大となるのは $y=-1$ のときである。

同様に，最小となるのは， $-4f(x)=0$，すなわち $x=1$ のときであり，

このとき， $f(xy)=f(y)$ が最小となるのは $y=-1$ のときである。

よって，以上より， $x=-1$， $y=-1$ のとき最大値 8

$\qquad x=1$， $y=-1$ のとき最小値 $-2$

(6) (Ⅰ)で $x$ を $x^2$， $z=1$ とすると，

$$f(x^2y)=f(x^2)f(y)+f(x^2)+f(y)$$

$$=\{(f(x))^2+2f(x)\}f(y)+\{f(x)\}^2+2f(x)+f(y)$$

$$=\{f(x)\}^2f(y)+2f(x)f(y)+\{f(x)\}^2+2f(x)+f(y)$$

$$H(x,\ y)=\{f(x)\}^2f(y)+2f(x)f(y)+\{f(x)\}^2-2f(x)+f(y)$$

ここで， $f(y)$ について整理すると

$$H(x,\ y)=\{(f(x))^2+2f(x)+1\}f(y)+\{f(x)\}^2-2f(x)$$

$$=\{f(x)+1\}^2f(y)+\{f(x)\}^2-2f(x)$$

$H(x,\ y)$ は $f(y)$ の 1 次関数と見ることができ，傾きが $\{f(x)+1\}^2\geqq 0$ なので単調に増加する。

したがって， $-2\leqq f(y)\leqq 0$ より， $f(y)=0$ すなわち $y=1$ のとき
最大値 $\{f(x)\}^2-2f(x)$ をとる。

さらに， $\{f(x)\}^2-2f(x)=\{f(x)-1\}^2-1$

$-2\leqq f(x)\leqq 0$ より， $f(x)=-2$ すなわち $x=-1$ のとき最大値 8 となる。

次に，$f(y)=-2$ すなわち $y=-1$ のとき最小値 $-\{f(x)\}^2-6f(x)-2$

さらに，$-\{f(x)\}^2-6f(x)-2=-\{f(x)+3\}^2+7$

$f(x)=0$ すなわち $x=1$ のとき最小値 $-2$ となる。

よって，以上より，最大値 $8$ （$x=-1$，$y=1$）

最小値 $-2$ （$x=1$，$y=-1$）

$\boxed{\text{別解}}$ $0\leqq -4f(x)\leqq 8$，$-2\leqq f(x^2y)\leqq 0$ なので

⑸と同様に考えると，最大となるのは $-4f(xy)=8$，$f(x^2y)=0$ のとき，

最小となるのは $-4f(x)=0$，$f(x^2y)=2$ のときなので，

よって，$x=-1$，$y=1$ のとき最大値 $8$

$x=1$，$y=-1$ のとき最小値 $-2$