$\boxed{\text{着眼点}}$

⑴は，互いに異なる3つの整数 a，b，c から2つずつ取り出してつくった和 $a+b$，$b+c$，$a+c$ について，$a<b<c$ から $a+b<a+c<b+c$ を導ければ，$a+b=11$，$a+c=15$，$b+c=20$ という連立方程式をつくることができます。

しかし，⑵の6個の和，⑶の10個の和の中には，大小関係が定まらないものがあります。大小関係が定まるものだけでは，解が得られる連立方程式をつくることはできません。

そこで，偶奇性に着目することで，候補を絞り込むことで解が得られる連立方程式をつくります。

⑷では，そのまま解こうとすると，3数の和のため，偶奇性で絞り込むことはできません。そのために，$a+b+c+d+e$ を求めることで，⑶に帰着させることを考えます。

$\boxed{\text{解答例}}$

⑴　与えられた3個の和を小さい順に並べると，11，15，20である。

$a<b$ の両辺に c を加えて　$a+c<b+c$ …①

$b<c$ の両辺に a を加えて　$a+b<a+c$ …②

①と②から　$a+b<a+c<b+c$

したがって　$a+b=11$，$a+c=15$，$b+c=20$

これらを連立させて解くと　$a=3$，$b=8$，$c=12$

⑵　与えられた6個の和を小さい順に並べると，18，23，29，30，36，41である。

$a<b<c$ の各辺に d を加えて　$a+d<b+d<c+d$ …③

$b<c<d$ の各辺に a を加えて　$a+b<a+c<a+d$ …④

⑴と同様に考えると　$a+c<b+c$，$b+c<b+d$ …⑤

③，④，⑤から

$$a+b<a+c<\begin{pmatrix}a+d<b+c\\ \text{または}\\ b+c<a+d\end{pmatrix}<\begin{pmatrix}b+c<a+d\\ \text{または}\\ a+d<b+c\end{pmatrix}<b+d<c+d$$

よって　$a+b=18$，$a+c=23$，$b+d=36$，$c+d=41$ …⑥

また，「$a+d=29$ かつ $b+c=30$」または「$b+c=29$ かつ $a+d=30$」のいずれか一方が成り立つ。

ここで，a と b の和が偶数であることから a と b の偶奇は一致し，b と d の和が偶数であることから b と d の偶奇は一致する。

したがって，a と d の偶奇が一致することから，$a+d$ は偶数である。

ゆえに，$b+c=29$，$a+d=30$ …⑦

⑥と⑦を連立させて解くと　$a=6$，$b=12$，$c=17$，$d=24$

（このとき，2つずつ取り出して和をつくると，18，23，29，30，36，41となり，題意を満たす。）

⑶　与えられた10個の和を小さい順に並べると，20，28，31，32，35，37，41，43，49，

52である。

$a<b<c<d$ の各辺に e を加えて　$a+e<b+e<c+e<d+e$ …⑧

$b<c<d<e$ の各辺に a を加えて　$a+b<a+c<a+d<a+e$ …⑨

$a<b<c$ の各辺に d を加えて　$a+d<b+d<c+d$ …⑩

$c<d<e$ の各辺に b を加えて　$b+c<b+d<b+e$ …⑪

(1)と同様に考えると　$a+c<b+c$，$c+d<c+e$ …⑫

⑧～⑫と $c+d>a+e$ から

$$a+b<a+c<\begin{pmatrix}a+d<b+c\\ \text{または}\\ b+c<a+d\end{pmatrix}<\begin{pmatrix}a+e<b+d\\ \text{または}\\ b+d<a+e\end{pmatrix}<\begin{pmatrix}b+e<c+d\\ \text{または}\\ c+d<b+e\end{pmatrix}<c+e<d+e$$

…＊

よって，$a+b=20$，$a+c=28$，$c+e=49$，$d+e=52$ …⑬

また，「$a+d=31$ かつ $b+c=32$」または「$b+c=31$ かつ $a+d=31$」のいずれか一方が成り立ち，「$a+e=35$ かつ $b+d=37$」または「$b+d=35$ かつ $a+e=37$」のいずれか一方が成り立ち，「$b+e=41$ かつ $c+d=43$」または「$c+d=41$ かつ $b+e=43$」のいずれか一方が成り立つ。

ここで，a と b の和が偶数であることから a と b の偶奇は一致し，a と c の和が偶数であることから a と c の偶奇は一致する。

したがって，b と c の偶奇が一致することから，$b+c$ は偶数である。

ゆえに，$a+d=31$，$b+c=32$ …⑭

⑬と⑭を連立させて解くと　$a=8$，$b=12$，$c=20$，$d=23$，$e=29$

（このとき，2つずつ取り出して和をつくると，20，28，31，32，35，37，41，43，49，52となり，題意を満たす。）

(4)　与えられた10個の和を小さい順に並べると，48，55，59，61，63，65，69，72，76，80 …◆　である。

◆は，互いに異なる5つの整数 a，b，c，d，e から3つずつ取り出してつくった和であるから，

$a+b+c$，$a+b+d$，$a+b+e$，$a+c+d$，$a+c+e$，$a+d+e$，$b+c+d$，$b+c+e$，$b+d+e$，$c+d+e$ …★

のいずれかである。

したがって，◆の総和と★の総和は等しい。

◆の総和は648，★の総和は $6(a+b+c+d+e)$ であるから

$$6(a+b+c+d+e)=648 \quad \text{すなわち} \quad a+b+c+d+e=108$$

よって，◆の各数を108から引いて得られる28，32，36，39，43，45，47，49，53，60は，互いに異なる5つの整数 a，b，c，d，e（ただし，$a<b<c<d<e$ かつ $c+d>a+e$）から2つずつ取り出してつくった和となる。

(3)と同様に＊が成り立つから，

$$a+b=28,\ a+c=32,\ c+e=53,\ d+e=60 \text{ …⑮}$$

また，「$a+d=36$ かつ $b+c=39$」または「$b+c=36$ かつ $a+d=39$」のいずれか一方が成り立ち，「$a+e=43$ かつ $b+d=45$」または「$b+d=43$ かつ $a+e=45$」のいずれか一方が成り立ち，「$b+e=47$ かつ $c+d=49$」または「$c+d=47$ かつ $b+e=49$」のいずれか一方が成り立つ。

ここで，a と b の和が偶数であることから a と b の偶奇は一致し，a と c の和が偶数であることから a と c の偶奇は一致する。

したがって，b と c の偶奇が一致することから，$b+c$ は偶数である。

ゆえに，$a+d=39$，$b+c=36$ …⑯

⑮と⑯を連立させて解くと　$a=12$，$b=16$，$c=20$，$d=27$，$e=33$

（このとき，3つずつ取り出して和をつくると，48，55，59，61，63，65，69，72，76，80となり，題意を満たす。）