着眼点

(1)　合成関数を理解する。

(2)　①②：x，y に 様々な値を代入してみる。

　③：$f(y+1)=f(y)+2y+1$ が導き出せる。

　④：$f(x)$ を x とみなす。

　⑤：③と④の結果を利用する。

　設問に従って解いていくと，$f(x)=x^2+1$ であることに気が付く。

解答例

(1)　$f(f(x))=f(3x-1)=3(3x-1)-1=9x-4$

(2)①　条件(Ⅲ)に $x=0$，$y=0$ を代入すると

$$f(f(0))=f(0)+2f(0)+f(0)-2$$

条件(Ⅰ)より

$$f(1)=1+2+1-2$$

よって，$f(1)=2$

条件(Ⅲ)に $x=0$，$y=-1$ を代入すると

$$f(f(0)-1)=f(0)+f(-1)-2$$

条件(Ⅰ)より

$$f(0)=1+f(-1)-2$$

よって，$f(-1)=2$

②　条件(Ⅲ)に $x=0$，$y=1$ を代入すると

$$f(f(0)+1)=f(0)+4f(0)+f(1)-2$$

$f(0)=1$，$f(1)=2$ より

よって，$f(2)=1+4\times1+2-2=5$

条件(Ⅲ)に $x=0$，$y=-2$ を代入すると

$$f(f(1)-2)=f(1)-2f(1)+f(-2)-2$$

$$f(0)=2-2\times2+f(-2)-2$$

よって，$f(-2)=5$

③　条件(Ⅲ)に $x=0$ を代入すると

$$f(f(0)+y)=f(0)+2(y+1)f(0)+f(y)-2$$

条件(Ⅰ)より

$$f(y+1)=f(y)+2y+1 \quad \cdots\cdots(\mathrm{i})$$

(ⅰ)に $y=1$，2，3，……，99 を代入すると

$$f(2)=f(1)+2\cdot1+1$$

$$f(3)=f(2)+2\cdot2+1$$

$$f(4)=f(3)+2\cdot3+1$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$f(100)=f(99)+2\cdot99+1$$

すべて加えると

$$f(100)=f(1)+2(1+2+3+\cdots\cdots+99)+1\cdot 99$$

$$=2+2\cdot\frac{1}{2}\cdot 99\cdot 100+99$$

よって，$f(100)=10001$

④　条件(Ⅲ)に $y=0$ を代入すると

$$f(f(x))=f(x^2)+2f(x)-1 \cdots\cdots(\text{ii})$$

条件(Ⅲ)に $y=-f(x)$ を代入すると

$$f(0)=f(x^2)+2\{-f(x)+1\}f(x)+f(-f(x))-2$$

$$1=f(x^2)-2\{f(x)\}^2+2f(x)+f(-f(x))-2$$

$$f(-f(x))=-f(x^2)+2\{f(x)\}^2-2f(x)+3 \cdots\cdots(\text{iii})$$

(ii)+(iii) より

$$f(f(x))+f(-f(x))=2\{f(x)\}^2+2$$

$f(x)$ を x とすると

$$f(x)+f(-x)=2x^2+2$$

ただし，条件(ii)より，すべての実数 x に対して $f(x)$ は 1 以上の実数なので、$f(x)$ を x としたとき x は 1 以上の実数となる。

よって，$x\geqq 1$ のとき，$f(x)+f(-x)=2x^2+2$ である。

⑤　④で得られた関係式に $x=100$ を代入すると

$$f(100)+f(-100)=2\cdot 100^2+2$$

$$10001+f(-100)=2\cdot 100^2+2$$

よって，$f(-100)=10001$