

着眼点

今回の距離は、成分の絶対値の和で表したマンハッタン距離（L1 距離）と呼ばれるもので、生活に適合できるものである。

通常の距離（L2 距離）において、フェルマー点と呼ばれている、各点からの距離の和が最小になる点を求めることは、根号の和という難解なものを扱うので、至難の技である。しかし、今回のL1 距離におけるフェルマー点は、本問題の集合場所となり、ご覧の通り求めやすい。

平面の条件においては、集合場所として一点に確定するが、円周上では一点と確定しない場合がある。

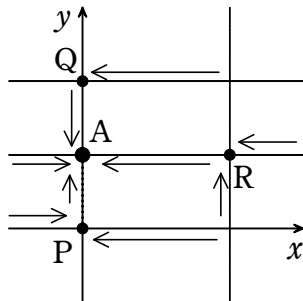
地点の幅（距離の最大）より円の半径が十分大きい場合は、3 人のときの3 地点を結んだ三角形は鈍角三角形という(2)と(4)の結果と整合性が取れている。5 人のときは(5)(b)の条件を満たし、平面と同じ結果が得られる。

マンハッタン距離は、ある点から少しずつ同じ距離ずつ変わることや、考える点が奇数であることから、距離の和が小さくなることと賛成多数と同値。従って、A は距離の和の極小値となる。つまり距離の和の最小値は A 中のいずれかとなる。逆にマンハッタン距離の和の最小値を求める方法として上述の多数決は有効。

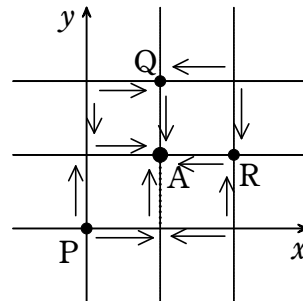
解答例

(1) 集合場所 A は以下の通り。

(a)



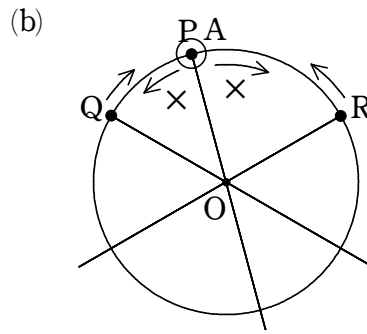
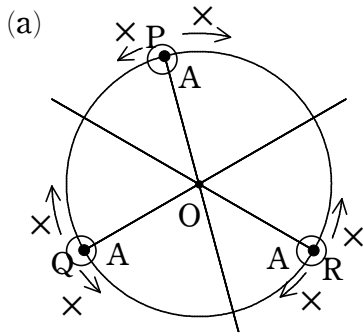
(b)



(2) 集合場所 A は、縦横両方向の中央の地点（座標平面のように点を座標で表したとき、それぞれの成分での中央値となる座標の点）。

説明：距離の性質より縦方向、横方向のみを着目して考えられる。一番左（右、上、下）側からの右（左、下、上）への移動を考える。中央の人と中央から右（左、下、上）側の人、2人が賛成するので、中央まで移動することになる。しかし、中央からさらに移動しようとするとき、中央の人と右（左、上、下）側の人と反対するので、これ以上移動することなく、両方向の中央地点である一点に収束する。

(3) 集合場所 A は以下の通り。



(4) その点を通る直径で円を2つの半円に分けることを、点における円の二等分と呼ぶことにする。

人のいない点を候補の点とするとき、その点において円を二等分すると、どちらかの半円には2人以上存在するため、この人達が移動に賛成するので、2人以上存在する方向に移動される。従って、いずれにしても候補の点は人のいる地点となる。

3人の地点を結んでできる三角形が、鋭角三角形のときは2人それぞれの地点、それ以外は直角（鈍角）のところにいる人の地点。

説明： $\triangle PQR$ が次の場合を考える。

(a) 鋭角三角形のとき、人のいる地点において円を二等分すると、どちらの方向にしても、その点以外では賛成・反対がともに1人だが、地点の人はどちらの方向にしても反対となり、結果、反対が多く点 A は移動されない。従って対称性より、点 A は P, Q, R。

(b) 鋭角三角形でないとき、鋭角でないところにいる人の地点において円を二等分すると、(a)と同じく、どちらの方向にしても反対が多く点 A は移動されない。それ以外においては、円を二等分すると片側の半円に人が集中し、A はそちらに移動する。

従って対称性より候補の点は鋭角でないところにいる人の地点が A となる。

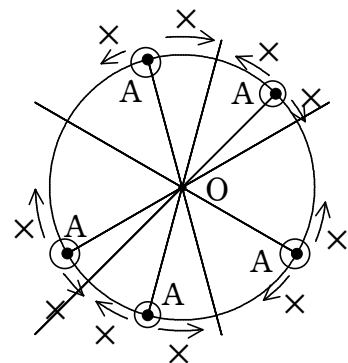
(5) 人のいない点を候補の点とするとき、その点において円を二等分すると、どちらかの半円には3人以上存在するため、この人達が移動に賛成するので、3人以上存在する方向に移動される。

従って、いずれにしても候補の点は(4)と同様に、人のいる地点となる。

(a) 候補の点を人がいる地点とすると、その点において円を二等分するとその2つで分けた半円には、条件より3人以下いる。つまり両方の半円でその人を除き、ちょうど2人いる。

従ってどちらの方向にしても、賛成2人、反対が3人となって移動されない。故に対称性から、この場合 A は5人それぞれの場所になる。

逆に、ある半円に4人以上いて、候補の点を直径に近い点とすると、半円の弧の中央の方向に人が多くい

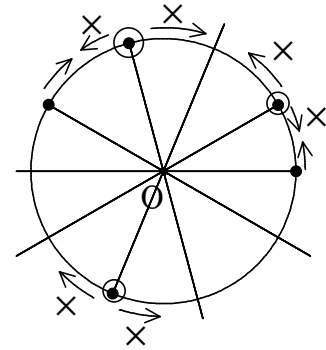


るため A は移動されるので、直径に近い点は A にならず、条件に適合しない。

(b) 条件は「少なくとも 4 人がある半円の周上におり、直径の両側からそれぞれ最も近い点 2 つを除く点を結ぶ弧の、中心に対して対称にある弧に人がいないとき」であり、これを示す。

(a)より条件を満たすのは、少なくとも 4 人は半円の周上にいるとき。

その半円において、直径の両側からそれぞれ最も近い点 2 つを除く点を結ぶ劣弧（劣弧とは半円より小さい方の弧）の、中心に対して対称にある弧に人がいるとする。このとき、その人がいる点を候補とすると、両側に 2 人ずついるため、その人の地点は A となる。



また、このとき直径の両側からそれぞれ最も近い点 2 つを除く点を結ぶ劣弧の端点においては、条件より両側に 2 人ずついるため、この 2 点も A となる。従って A は以上の 3 点。

逆に、半円において、直径の両側からそれぞれ直径の端点に最も近い 2 点を除く点を結ぶ劣弧の、中心に対して対称にある弧に人がいないとする。このと条件から、少なくとも 4 人がいる半円が 2 つある。半円の直径に近い点を候補とすると、直径から離れる方向への移動は、賛成が半円にいる 3 人と多いので、候補の点は移動される。これを 2 つの半円で考えると、A は直径の両側からそれぞれ最も近い点 2 つを除く残った 1 点のみとなる。

