

配点

(1) 4点 (2)① 8点 ② 8点 ③ 8点 ④ 8点 ⑤ 4点

講評

(1) 合成関数は多くの受験生ができていました。定義を理解して、解答できる能力は数学を勉強するためのもっとも基本的なことです。

(2) ①②の設問も予想以上にできていました。おそらく、数学コンテストでは「関数方程式」をよく出題している所以对策をたてた受験生もいたように思います。

③以降の設問で差がつかしました。

誤答が多かったのは、次の(ア)~(ウ)です。

(ア) $f(x)=x^2+1$ と予想し、それを使って解答した。

(イ) n が正の整数のとき、 $f(n)=n^2+1$ を導いて、整数 n を実数 x として $f(x)=x^2+1$ で解答した。(解答例の $f(y+1)=f(y)+2y+1$ の y に $1 \sim n-1$ の整数を代入して和をとると $f(n)=n^2+1$ を求めることができる。)

(ウ) 関数 $f(x)$ が整式であると決めて $f(x)=x^2+1$ を求めていた。

$f(x)=x^2+1$ を予想したことは大変感心しますが、求まっていない関数を利用して答えが合っても正解とは言えないので点数を与えませんでした。また、注意してほしいこととして、関数方程式を満たす関数が1つに決まらないこともあります(数学オリンピックの問題でみることがあります)。厳しい採点と感じる受験生もいるかもしれないが、厳密性を重視しました。

次に、 $f(x)=x^2+1$ (ただし、 $x \geq 1$) を求めるためには次のような解答が考えられます。

条件(Ⅲ)の式に $y=-1$ を代入すると

$$f(f(x)-1)=f(x^2)$$

ここで、 $f(a)=f(b)$ ならば $a=b$ を示す。(a, b は1以上の実数)

$f(x)=X$ とおく、ただし $X \geq 1, h > 0$ に対して

$$\begin{aligned} f(X+h)-f(X) &= f(x^2)+2(h+1)X+f(h)-2-\{f(x^2)+2X+f(0)-2\} \\ &= 2hX+f(h)-1 > 0 \quad (\text{なぜなら } h > 0, X \geq 1, f(h) \geq 1) \end{aligned}$$

よって、 $a > b \geq 1$ のとき $f(a) > f(b)$ となり、 $f(a)=f(b)$ ならば $a=b$ となる。

ゆえに、 $f(f(x)-1)=f(x^2)$ より、 $f(x)=x^2+1$ である。

$f(f(x)-1)=f(x^2)$ に気づいた受験生も多くいましたが、「 $f(a)=f(b)$ ならば $a=b$ 」を示していなかったり、解答が不十分だったりと今一步でした。

残念ながら関数を求めることができた受験生は一人もいませんでした。

最後に昨年の講評と同じですが、「関数方程式」の問題を解くための考え方を書いておきます。

① $f(x+y)=f(x)+f(y)$, $f(x+y)=f(x)f(y)$ 等の代表的な問題を解いてください。

② x にどのような値を代入すれば良いのか判断してください。

③ $f(x)$ がどのような関数なのか予想してください。

④ $f(x)$ の条件や値から他の関係式や性質を発見することを心掛けてください。

等でしょうか。漠然とした内容ですが、これまでの数学コンテスト、大学入試、数学オリンピックの問題等を演習し、「関数方程式」を得意分野の一つにしてください。もし、来年度の数学コンテストに「関数方程式」が出題されたら、高得点をとることを期待しています。

(立命館慶祥中学校・高等学校 大和 達也)