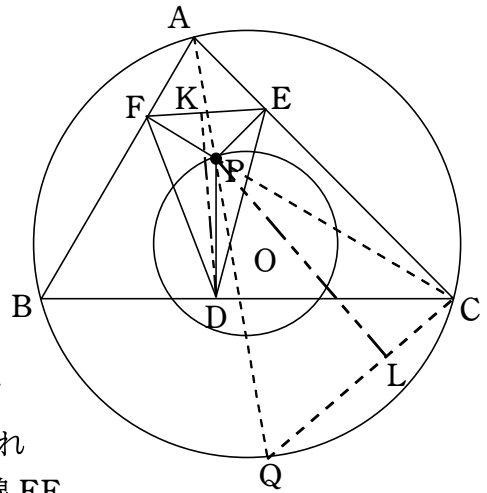


問題 5

次の定理について各問に答えよ。

定理 1 $\triangle ABC$ の外心を中心とする円 O' の円周上の点 P から 3 直線 BC, CA, AB へおろした垂線との交点をそれぞれ D, E, F とする。このとき、 $\triangle DEF$ の面積は点 P の位置によらず一定である。



以降、 $\triangle ABC$ の外接円を O とし、直線 AP が再び円 O と交わる点を Q とし、円 O 、円 O' の半径をそれぞれ R, r とする。また、点 D, P からそれぞれ直線 EF, CQ におろした垂線の交点を K, L とする。

- (1) $AP \times PQ$ を R, r を用いて表せ。
- (2) $\triangle DEK \sim \triangle PCL$ であり、相似比が $\sin C : 1$ であることを示せ。
- (3) $\triangle DEF$ の面積を R, r, A, B, C を用いて表せ。
- (4) 定理 1 が次の定理の拡張になっていることを説明せよ。

定理 2 (シムソン) $\triangle ABC$ の外接円周上の点 P から 3 直線 BC, CA, AB に垂線を引いたとき、それらの交点は 1 直線上にある。

- (5) 次の定理が定理 2 の拡張になっていることを説明せよ。

定理 3 (カルノー) $\triangle ABC$ の外接円周上の点 P から 3 直線 BC, CA, AB と同じ向きで等しい角 (θ とする) をなす直線を引いたとき、それらの交点は 1 直線上にある。

- (6) 定理 1 と定理 3 を含む、拡張した命題を述べよ。
- (7) (6) の命題の真偽を述べよ。(真であれば $\triangle DEF$ の面積を R, r, A, B, C を用いて表し、偽であればその反例を挙げよ。)