

配点

(1) 7点 (2) 7点 (3) 7点 (4) 19点

講評

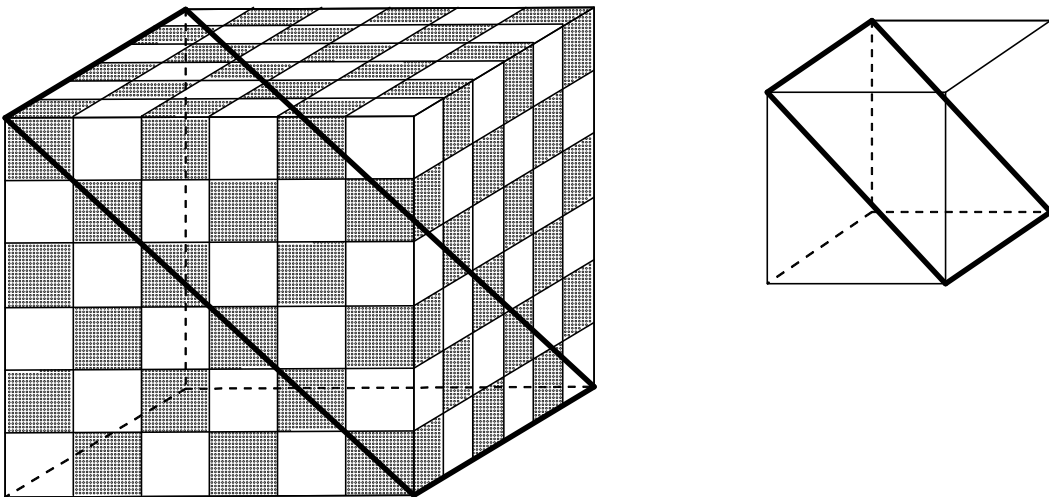
立方体を、ある点を通るように切断した時の「切り口の形」に関する問題は、高校入試などでよく見られる問題です。この切り口はどこを通っているかを もっと詳しく見てみようというのが今回の問題でした。

切り口の問題を考えるとときには展開図を考えることで考えやすくなります。さらに今回の問題では、大きい立方体と小さい立方体の切り口を考えて、大きい切り口の図形に小さい切り口の図形を隙間ないように敷き詰めることで解くことができます。

(1)では、大きい立方体の切り口を考えると、切り口は $6 \times 6\sqrt{2}$ の長方形であることがわかります。

次に、小さい立方体の切り口を考えてみましょう。切り口は $1 \times \sqrt{2}$ の長方形になります。

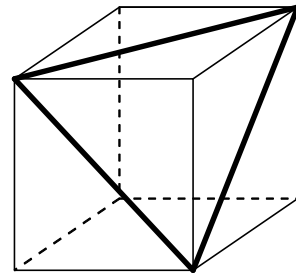
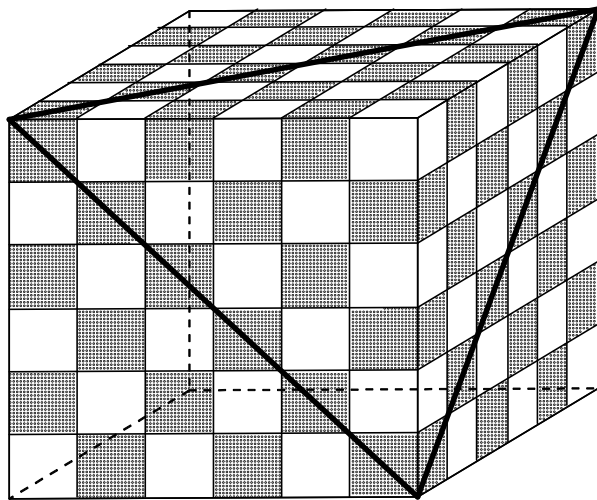
よって、 $6 \times 6\sqrt{2}$ の長方形に $1 \times \sqrt{2}$ の長方形を敷き詰めればよいということになります。



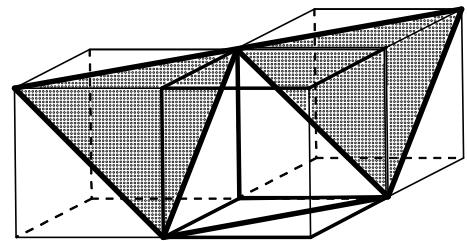
あとは白と黒に色を塗ればよいのですが、【図1】の端の立方体の色を見てみましょう。すべて黒になっているので、色を塗ると黒と白の縞模様のような形になります。切り口の形までわかったのですが、最後の色を塗るのを間違えてしまった人が多かったです。慎重に考えるとわかったと思うので、もう一步の人が多かったところが残念でした（1点減点しています）。

(2)も同様に解いていきましょう。

大きい立方体も小さい立方体も正三角形であることがわかります。



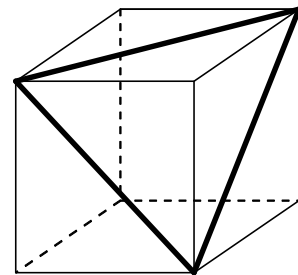
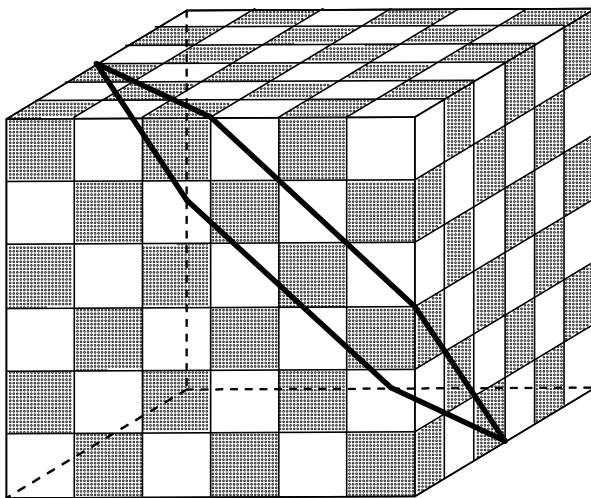
一辺が $6\sqrt{2}$ の正三角形に一辺が $\sqrt{2}$ の正三角形を敷き詰めて色を塗ってみましょう。
 すべて黒一色になると考えた人がいましたが、右の図のように、方向の違う正三角形の切断面は2つの立方体の隣の立方体の切断面になるため、色が異なります。



したがって、解答のような切断面の図形になります。

また、切断面の図形まで求められたが、白と黒の個数を間違えてしまった人もいました。これももったいない。実際に図を書いて数えてみればわかるのですが、黒の正三角形と白の正三角形の個数は異なります。この辺は実際に書いてみないとわからないので、しっかりと作図することは大切ですね！

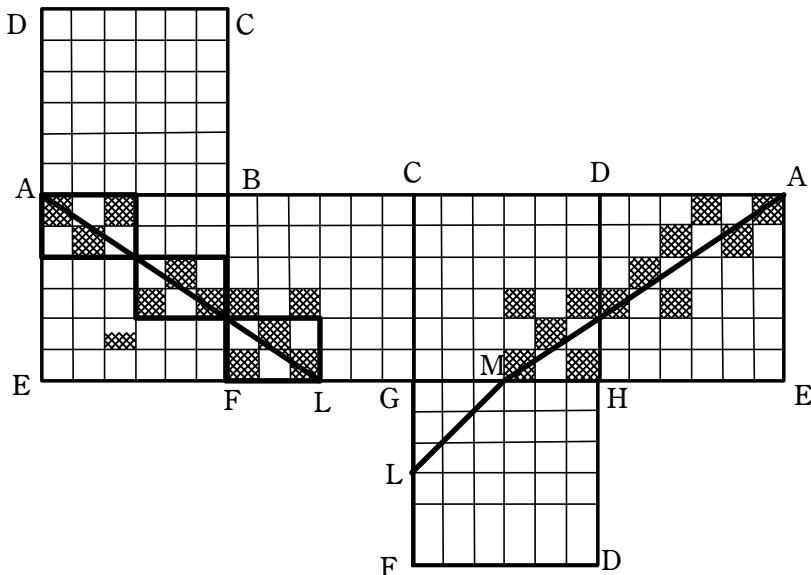
(3)では、大きい立方体の切り口は正六角形、小さい立方体の切り口は(2)と同じなので正三角形になります。



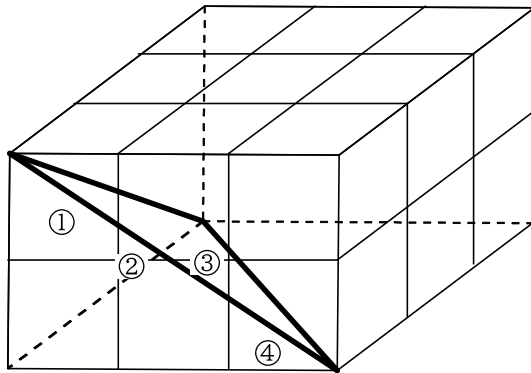
一辺が $3\sqrt{2}$ の正六角形に一辺が $\sqrt{2}$ の正三角形を敷き詰めて色を塗ると、今度は白の正三角形と黒の正三角形の個数は等しくなります。(2)と(3)の違いに少し面白いと思ったのは私だけでしょうか。

(1)から(3)まではしっかり考えれば解ける問題でした。問題は(4)です。これが五角形になると一気に難しくなります。この五角形の議論で勝負して欲しかったのですが、(4)に手を付けてくれた人は少なく、もう少し頑張っただけなのが残念な感じがします。

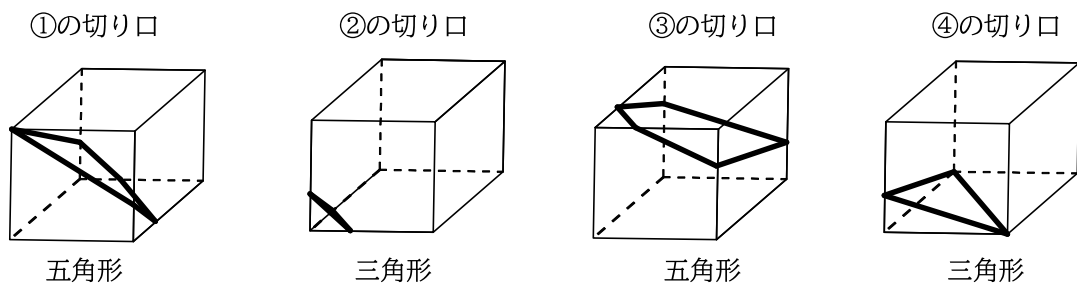
A, L, Mを通る平面の切断を考えるために、まず展開図を考えてみましょう。(1)から(3)までは切り口の直線がすべて小さい立方体の頂点を通っていたため、考えやすかったのですが、(4)は頂点を通らないため単純には考えられません。そこで、最初に頂点を通る図形に分割して考えます。それが下の図の太線の長方形です。



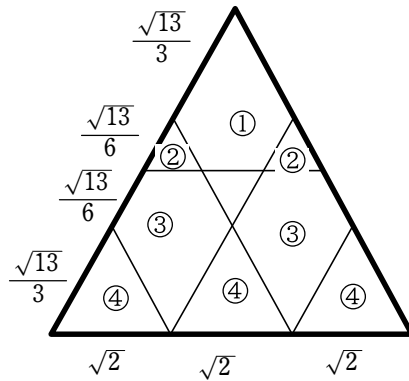
太線の長方形からできる直方体を取り出すと、下の図のようになります。



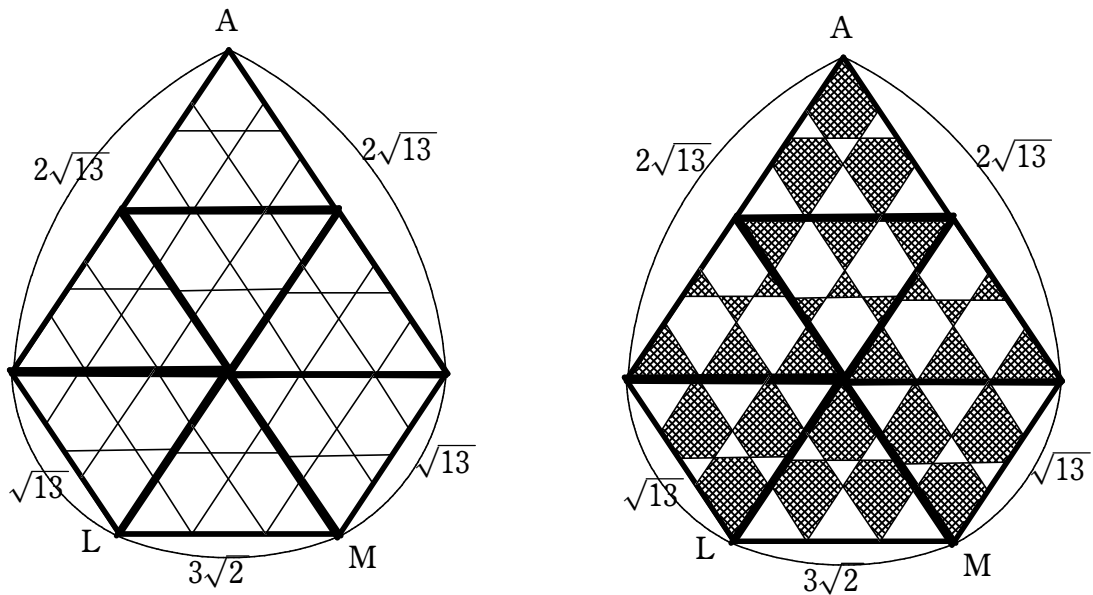
小さい立方体の切り口を考えたいので、①から④に分けてそれぞれの切り口の形を考えると次のようになります。



これらの図形を五角形に敷き詰めると次のようになります。



なかなかきれいな模様です。これを大きい立方体に敷き詰めていくと次のようになり、白黒の色を塗るととてもきれいな模様がでてきます。



すごくきれいですね！あとはそれぞれの図形の面積を求め、数を数えるとおしまいです。今回は面積を求めるのに相似をうまく利用しました。

実はこの問題には元ネタがあります。すごく昔になりますが第18回の数学コンテストの問題5がこの問題の元ネタになっています。何を隠そう、第18回時には私も高校生。皆さんと同じように数学コンテストに参加して、3時間30分、難問と戦っていました。問題を解きながら「こんなに面白い問題を作れる北海道の数学の先生方はすごいなー」という感想を持ったことを覚えています。

この問題が皆さんの刺激になったかはわかりませんが、皆さんが数学をさらに勉強して、いつの日か一緒に数学コンテストの問題を作れる日が来ることを楽しみにしています。一緒に数学を楽しみましょう！

(札幌創成高等学校 外山 尚生)