

第 6 回
北海道高等学校数学コンテスト

問 題

昭和63年 1 月15日(金)

9 時00分～12時30分(210分)

北海道算数数学教育会高等学校部会

問題 1 円周の長さが 1 である円の中を円周上の点 A から動点 P が直進し、円周上の点 $B_1, B_2, \dots$, にぶつかるごとに図のように反射して方向を変える。次の問に答えよ。

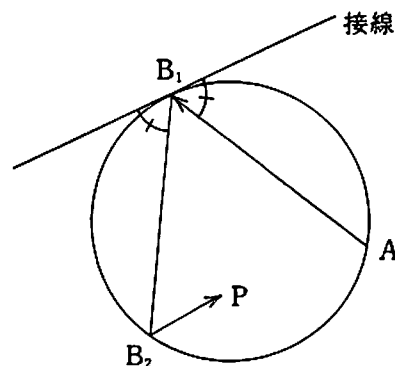
(点 B_1 は動点 P が最初にあぶつかる点、点 B_2 は 2 回にあぶつかる点、 $\dots B_n$ は n 回にあぶつかる点を表す。)

(1) 弧 AB_1 の長さが $\frac{3}{7}$ であったとき、点 B_n で点 A と重なるという。 n の最小値を求めよ。

(2) 弧 AB_1 の長さが r ($0 < r < 1$) のとき、次の(ア) (イ)を説明せよ。

(ア) r が有理数なら、必ず点 A に戻ってくる。

(イ) r が無理数なら、点 A には戻ってこない。



問題 2 解答用紙にある図は共通部分が頂点 A だけの正方形 ABCD 正方形 AEFG であり $AD = 2 AE$ となっている。

解答に必要な図は free hand でよいから、この図に加えること。

問 1 : ED を一辺として前の 2 つの正方形とは E, D の外に共通部分が無いように正方形 EDIJ を書け。以下 $\angle AED = \alpha$, $\angle ADE = \beta$ とする。

問 2 : $\triangle EAD$ を中心に 90° 回転して ED を EJ に重ね A の移った点を A' とする。
次を証明せよ。(問 2 の図は問 1 の図に加えること)

(1) F, E, A' は一直線上にある。

(2) $A'F = A'J$

(3) $\angle JFE = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$

問 3 : BG を一辺として前の 3 つの正方形とは B, G の外に共通部分が無いように正方形 BGMN を書け。

問 4 : $\triangle AGB$ を中心に 90° 回転して GB を GM に重ね A の移った点を A'' とする。
次を証明せよ (問 4 の図は問 3 の図に加えること)

(1) F, G, A'' は一直線上にあつて、 $A''M = A''F$

(2) $\angle GA''M = \alpha + \beta$

(3) M, F, J は一直線上にある。

問題 3 数 $1, 2, 3, \dots, n$ を全部同時にとりあげて一列に並べる。(これを異なる n 個のものから n 個とる順列という) その順列の中でどの数字 k に対しても数字 k が k 番目にならないものを「かく乱順列」という。例えば $n=3$ のとき $3, 1, 2$ はかく乱順列である。

- (1) n 個の数のかく乱順列の総数を $D(n)$ で表す。このとき $D(3), D(4), D(5)$ を求めよ。
- (2) $D(8)$ を求めよ。ただし $D(6)=265, D(7)=1854$ であることを用いてもよい。

問題 4 x についての n 次の多項式 $f(x, n)$ ($n=0, 1, 2, 3, \dots$) を次のように

$$f(x, 0) = 1, f(x, 1) = x, f(x, 2) = \frac{x(x-1)}{2}, \dots$$

$$\text{一般に, } f(x, n) = \begin{cases} 1 & (n=0 \text{ のとき}) \\ \frac{x(x-1)(x-2)\cdots\{x-(n-1)\}}{1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n} & (n=1, 2, 3, \dots \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定める。

また、多項式 $f(x, n)$ に対して、 $(\Delta f)(x, n)$ を

$$(\Delta f)(x, n) = f(x+1, n) - f(x, n)$$

とおく。このとき、次の式が成立することを示せ。

- (1) $f(x+y, 2) = f(x, 0) \times f(y, 2) + f(x, 1) \times f(y, 1) + f(x, 2) \times f(y, 0)$
- (2) $f(x, n) = f(x-1, n-1) + f(x-1, n)$ ($n=1, 2, 3, \dots$ のとき)
- (3) $(\Delta f)(x, 0) = 0$
- (4) $(\Delta f)(x, n) = f(x, n-1)$ ($n=1, 2, 3, \dots$ のとき)

問題 5 p は自然数, q は整数とし, p, q は互いに素とする。

1. 有理数 $\frac{2}{3}$ に対して, $p > 3$ ならば, 常に $\left| \frac{2}{3} - \frac{q}{p} \right| \geq \frac{c}{p}$ となるような正の定数 c を見つけよ。

2. 有理数 $\frac{l}{k}$ (k は自然数, l は整数, k, l は互いに素) に対して $p > k$ ならば, 常に

$$\left| \frac{l}{k} - \frac{q}{p} \right| \geq \frac{c}{p}$$

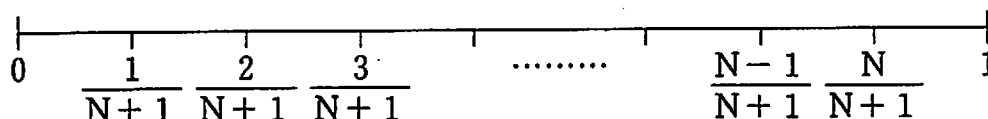
となるような正の定数 c の最大値を求めよ。

3. 正の無理数 θ に対して $\left| \theta - \frac{q}{p} \right| < \frac{1}{p(p+1)}$ ①となるような有理数 $\frac{q}{p}$ が無数にあることを次の手順で証明せよ。

(i) 正の実数 x に対して, (x) を x の小数部分とする。

自然数 N に対して, N 個の数 $(\theta), (2\theta), (3\theta), \dots, (N\theta)$ は下の図のような区間 $(0, 1)$ の中に存在する。

($N+1$) 等分



上のことから, ある自然数 n ($1 \leq n \leq N$) と整数 m に対して,

$$|n\theta - m| < \frac{1}{N+1}$$

となることを証明せよ。

(ii) ①を満たす有理数が有限個であると仮定して, 矛盾を導け。

昭和62年度(昭和63年 1 月15日実施)

第 6 回

北海道高等学校数学コンテスト

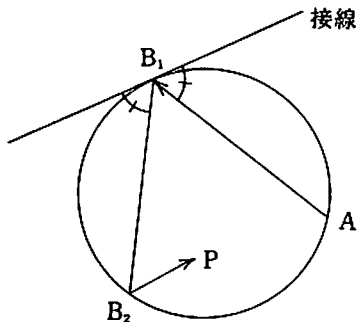
解 答 と 解 説

北海道算数数学教育会高等学校部会

円周の長さが1である円の中を円周上の点Aから動点Pが直進し、円周上の点 B_1 , B_2 , …… にぶつかるごとに図のように反射して方向を変える。次の問いに答えよ。

(点 B_1 は動点 P が最初につかる点, 点 B_2 は 2 回目につかる点, ……点 B_n は n 回目につかる点を表す。)

- (1) 弧 AB_1 の長さが $\frac{3}{7}$ であったとき、点 B_n で点 A と重なるという。 n の最小値を求めよ。
- (2) 弧 AB_1 の長さが r ($0 < r < 1$) のとき、次の (ア) (イ) を説明せよ。
- (ア) r が有理数なら、必ず点 A に戻ってくる。
- (イ) r が無理数なら、点 A には戻ってこない。

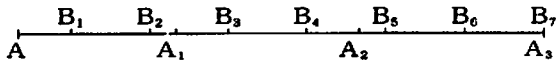


着眼点

- (1) 図のように反射すると弧 $AB_1 = \text{弧 } B_1B_2 = \dots = \frac{3}{7}$ に着目する。
- (2) (ア) 正の有理数は $\frac{q}{p}$ (p, q は互いに素な自然数) と表すことができる。
- (イ) 正の無理数は $\frac{q}{p}$ (p, q は互いに素な自然数) で表すことができない。

解答例

- (1) $n=7$ のとき点 A と重なる。理由は下図のとおり (AA_1 を円周とする)。

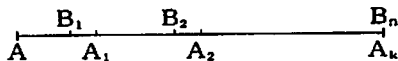


点 $B_1, B_2, \dots$ で反射することにより弧 $AB_1 =$ 弧 $B_1B_2 = \dots = \frac{3}{7}$ となることから弧 $AB_n = \frac{3}{7}n$ となる。これが元の点 A に重なるためには、 $\frac{3}{7}n$ が整数となることが必要十分である。3 と 7 は互いに素であるから、 $\frac{3}{7}n$ が整数であるためには n が 7 の倍数であることが必要十分。故に、そのような n の最小値は 7 である。

- (2) (ア) r が有理数なら, $r = \frac{q}{p}$ (p, q は自然数で互いに素) とおくことができる。このとき, (1)と

同様に考えると動点 P は $n=p$ のとき元の点 A に戻ってくる。

- (イ) 動点 P は点 A にもどってくると仮定する。



即ち、動点 P は $n=m$ のとき点 A_k と重なりと仮定できる。

点 $B_1, B_2, \dots$, で反射することにより弧 $AB_1 = \text{弧 } A_1B_2 = \dots = \text{弧 } B_{m-1}B_m = r$ となり, 仮定から $mr = k$ となるが, $r = \frac{k}{m}$ と表され, これは r が無理数であることに反する。よって, 動点 P はもどってこない。

2

解答用紙にある図は共通部分が頂点 A だけの正方形 ABCD 正方形 AEFG であり $AD = 2AE$ となっている。解答に必要な図は free hand でよいから、この図に加えること。

- 問1 EDを一辺として前の2つの正方形とはE, Dの外に共通部分が無いように正方形EDIJを書け。以下 $\angle AED = \alpha$, $\angle ADE = \beta$ とする。

- 問 2 $\triangle EAD$ を E 中心に 90° 回転して ED を EJ に重ね A の移った点を A' とする。次を証明せよ。(問 2 の図は問 1 の図に加えること)

- (1) F, E, A'は一直線上にある。
 (2) $A'F = A'J$ (3) $\angle JFE = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$

- 問3 BGを一辺として前の3つの正方形とは
B, Gの外に共通部分が無いように正方形
BGMNを書け。

- 問 4 $\triangle AGB$ を G 中心に 90° 回転して GB を GM に重ね A の移った点を A'' とする。次を証明せよ。(問 4 の図は問 3 の図に加えること)

- (1) F, G, A"は一直線上にあって,
 $A''M = A''F$
- (2) $\angle GA''M = \alpha + \beta$
- (3) M, F, Jは一直線上にある

着眼点

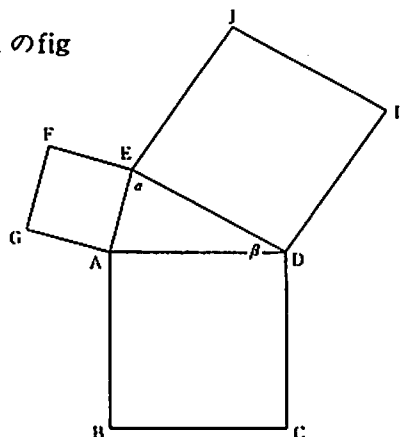
- 問2 (1) $\angle AEA' = 90^\circ$, $\angle FEA = 90^\circ$
 (2) $A'F = 2AE$, $A'J = AD$
 (3) $\angle EA'J$ の補角は $\triangle JFA'$ 、 $\triangle JEA'$ 両方の外角となる。 $\angle A'FJ = \theta$ とでも置いて考え

問4 (1)は問2(1), (2)と同様(2) $\angle A'' = \angle GAB$, EA
をAの方に延長して, その上に任意に一点Q
をとる。そして $\angle GAB = \angle QAD$ を見つける。

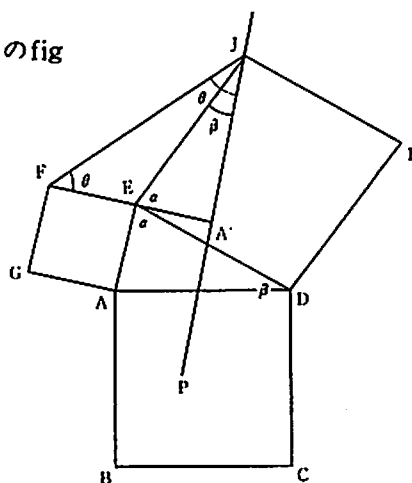
(3) $\angle MFA'' = \psi$ とでも置いて $\triangle MA''F$ から
 $2 \psi + \alpha + \beta = 180^\circ$

解答例

問 1 の fig



問 2 の fig

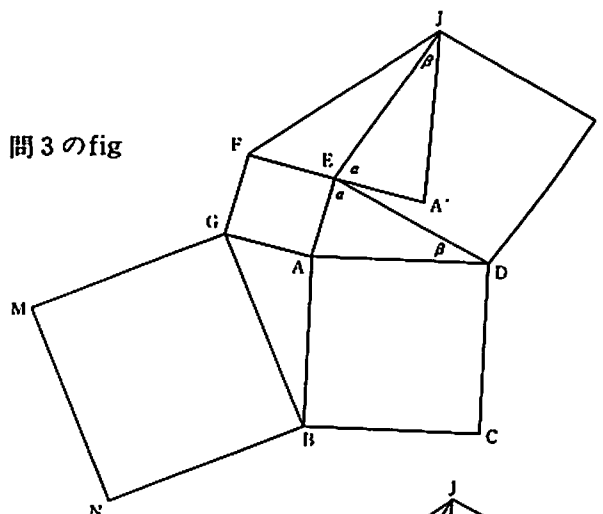


問2 (1) $\angle AEA' = 90^\circ$, $\angle FEA = 90^\circ$
 $\angle FEA + \angle AEA' = 180^\circ$
 $\therefore F, E, A'$ は一直線上にある。

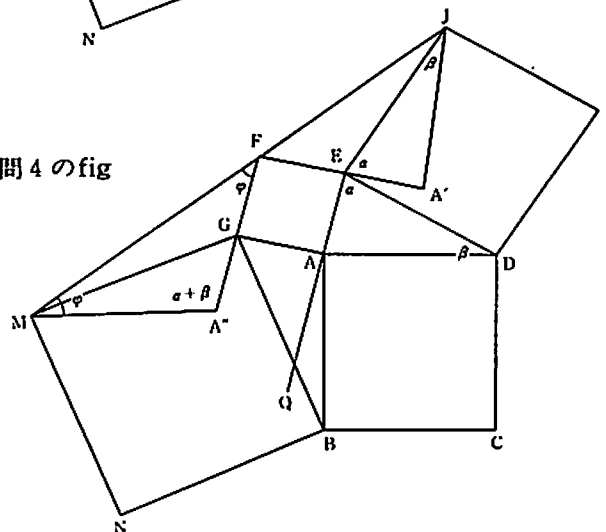
$$\begin{aligned}(2) \quad A'F &= A'E + EF = 2 AE \\ A'J &= AD = 2 AE \\ \therefore A'F &= A'J\end{aligned}$$

(3) JA'をA'の方向に延長して、その上に任意に一点Pをとれば△JEA'から
 $\angle EA'P = \angle A'EJ + \angle A'JE = \alpha + \beta$
 また $\angle JFA' = \theta$ と置けば
 △JFA'から $\angle FA'P = 2\theta$
 $\therefore 2\theta = \alpha + \beta$
 $\therefore \theta = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$

問 3 の fig



問 4 の fig



問4 (1) $\angle A''GA = 90^\circ$, $\angle FGA = 90^\circ$
 $\angle A''GA + \angle FGA = 180^\circ$
 $\therefore F, G, A''$ は一直線上にある。
 $A''F = A''G + GF = 2AE$
 $A''M = AB = 2AE \quad \therefore A''M = A''F$

(2) $\angle GA''M = \angle GAB$
 EA を A の方向に延長して、その上に
 任意に一点 Q をとる。
 $\angle GAB = \angle GAQ + \angle QAB$
 $= 90^\circ + \angle QAB$
 $\angle QAD = \angle QAB + \angle BAD$
 $= \angle QAB + 90^\circ$
 $\therefore \angle GAB = \angle QAD$
 一方 $\angle QAD$ は $\triangle EAD$ の外角
 だから $\angle QAD = \alpha + \beta$
 $\therefore \angle GA''M = \angle GAB = \alpha + \beta$

(3) $\triangle MA''F$ で $\angle A'' = \alpha + \beta$
 $\angle MAF'' = \psi$ と置けば $\angle A''MF = \psi$
 $2\psi + \alpha + \beta = 180^\circ$
 $\therefore \angle MFA'' = 90^\circ - \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$
 $\angle MFA'' + \angle GFE + \angle JFE$
 $= 90^\circ - \frac{1}{2}(\alpha + \beta) + 90^\circ + \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$
 $= 180^\circ$
 $\therefore M, F, J$ は一直線上にある。

数 1, 2, 3, ..., n を全部同時にとりあげて一列に並べる。(これを異なる n 個のものから n 個とる順列という) その順列の中でどの数字 k に対しても数字 k が k 番目にないものを「かく乱順列」という。例えば $n=3$ のとき 3, 1, 2 はかく乱順列である。

- (1) n 個の数のかく乱順列の総数を $D(n)$ で表す。このとき $D(3)$, $D(4)$, $D(5)$ を求めよ。
 (2) $D(8)$ を求めよ。ただし $D(6)=265$, $D(7)=1854$ であることを用いてもよい。

着眼点

n が小さければ数え上げてよい。 n が大きくなると規則性に注目しなければ求められない。一般には $D(n+1)=n[D(n)+D(n-1)]$ が成り立つている。…「基礎解析」(2年で学ぶ)の漸化式の内容

解答

- (1) 1, 2, 3 のかく乱順列は 3, 1, 2 と 2, 3, 1 しかないので

$$D(3)=2$$

- 1, 2, 3, 4 のかく乱順列は

2, 1, 4, 3 3, 1, 4, 2 4, 1, 2, 3
 2, 3, 4, 1 3, 4, 2, 1 4, 3, 1, 2
 2, 4, 1, 3 3, 4, 1, 2 4, 3, 2, 1

より

$$D(4)=9$$

- 1, 2, 3, 4, 5 のかく乱順列

1 番目の数を① 2 番目の数を② …… 5 番目の数を⑤ とする。仮に①が2であったとすると①が1になることはない

このときのかく乱順列は

①②③④⑤

2, 1, 5, 3, 4 } ①が2で
 2, 1, 4, 3, 5 } ②が1のとき 2通り

2, 3, 1, 5, 4

2, 3, 5, 1, 4

2, 3, 4, 5, 1

2, 4, 1, 5, 3

2, 4, 5, 3, 1

2, 4, 5, 1, 3

2, 5, 1, 3, 4

2, 5, 4, 3, 1

2, 5, 4, 1, 3

①が2で

②が1でないとき 9通り

このとき「②に入るのは1でない数」

「③に " 3でない数」

「④に " 4でない数」

「⑤に " 5でない数」

よってこれは②…⑤の4個のかく乱順列の総数と同じ

ゆえに①が2のときは11通り

よって, $n=3, 4, 5$ についても同様にできるので

$$D(5)=4 \times 11=44$$

- (2) $D(8)$ を求める

仮に①が2であるとする (i) ②が1のとき,
 (ii) ②が1でないときに分けられる。

- (i) ①が2, ②が1のとき

①②③…⑧

2 1 ……

かく乱順列の総数は

③…⑧の6個のかく乱順列の

総数と同じ $D(6)=265$

- (ii) ①が2, ②が1でないとき

②に入るのは1でない数

③に入るのは3でない数

⋮

⑧に入るのは8でない数

よってこれは②…⑧の7個のかく乱順列の総数と同じ

$$D(7)=1854$$

これは①が3, 4, 5…8のときも同様なので

$$D(8)=7\{D(6)+D(7)\}=7 \times \{2119\}=14833$$

発展

一般に $D(n+1)=n[D(n)+D(n-1)]$ が成り立つ

また $\frac{D(n)}{(n \text{ 個の順列の総数})}$ は $n \rightarrow \infty$ とするとき

$\frac{1}{e}$ (e は自然対数) に近づくことが知られている。

x についての n 次の多項式 $f(x, n)$ ($n=0, 1, 2, 3, \dots$) を次のように

$$f(x, 0)=1, f(x, 1)=x, f(x, 2)=\frac{x(x-1)}{2}, \dots$$

一般に, $f(x, n)=$

$$\begin{cases} 1 & (n=0 \text{ のとき}) \\ \frac{x(x-1)(x-2)\dots\{x-(n-1)\}}{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n} \end{cases}$$

($n=1, 2, 3, \dots$ のとき)

と定める。

また、多項式 $f(x, n)$ に対して、 $(\Delta f)(x, n)$ を

$$(\Delta f)(x, n) = f(x+1, n) - f(x, n)$$

とおく、このとき、次の式が成立することを示せ。

$$(1) f(x+y, 2) = f(x, 0) \times f(y, 2) + f(x, 1) \times f(y, 1) + f(x, 2) \times f(y, 0)$$

$$(2) f(x, n) = f(x-1, n-1) + f(x-1, n) \quad (n=1, 2, 3, \dots \text{のとき})$$

$$(3) (\Delta f)(x, 0) = 0$$

$$(4) (\Delta f)(x, n) = f(x, n-1) \quad (n=1, 2, 3, \dots \text{のとき})$$

着眼点

① $f(x, n)$ は、 x についての n 次の多項式を表すことに着目する。 n が 0, 1, 2 のとき具体的な例として表わされているので、(1) の正解は得やすいと思う。

② 1 から n までの自然数の積は $n!$ (n の階乗) と表すが、これは
 $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-2) \times (n-1) \times n$
 を意味する。

同様に、 $x(x-1)(x-2)\dots$

$\{x-(n-1)\}$ は、 n 個の積で、

$x(x-1)(x-2)\dots$

$\{x-(n-3)\}\{x-(n-2)\}\{x-(n-1)\}$

を意味することに、注意する。

③ $(\Delta f)(x, n)$ の定義については、理解しやすいと思う。高得点を期待する。

解答例

$$(1) f(x+y, 2) = \frac{(x+y)(x+y-1)}{1 \times 2}$$

$$= \frac{x^2 + 2xy + y^2 - x - y}{2}$$

$$f(x, 0) \times f(y, 2) + f(x, 1) \times f(y, 1) + f(x, 2) \times f(y, 0)$$

$$= 1 \times \frac{y(y-1)}{2} + x \times y + \frac{x(x-1)}{2 \times 1}$$

$$= \frac{x^2 + 2xy + y^2 - x - y}{2}$$

$$\therefore f(x+y, 2) = f(x, 0) \times f(y, 2) + f(x, 1) \times f(y, 1) + f(x, 2) \times f(y, 0)$$

$$(2) n=1 \text{ のとき, } f(x, 1) = x, f(x-1, 0) = 1, f(x-1, 1) = x-1 \text{ より}$$

$$f(x, 1) = f(x-1, 0) + f(x-1, 1)$$

は成立する。

$$n=2, 3, 4, \dots \text{ のとき, } f(x, n)$$

$$= \frac{x(x-1)(x-2)\dots\{x-(n-2)\}\{x-(n-1)\}}{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1) \times n}$$

$$f(x-1, n-1) =$$

$$\frac{(x-1)(x-2)(x-3)\dots\{(x-1)-(n-3)\}\{(x-1)-(n-2)\}}{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-2) \times (n-1)}$$

$$f(x-1, n) =$$

$$\frac{(x-1)(x-2)(x-3)\dots\{(x-1)-(n-2)\}\{(x-1)-(n-1)\}}{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1) \times n}$$

より、

$$f(x-1, n-1) + f(x-1, n) =$$

$$\frac{(x-1)(x-2)(x-3)\dots(x-n+1)}{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1) \times n}$$

$$\times \{n+(x-n)\}$$

$$= \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)\dots\{x-(n-1)\}}{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1) \times n}$$

$$= f(x, n)$$

よって、成立する。

$$(3) (\Delta f)(x, 0) = f(x+1, 0) - f(x, 0)$$

$$= 1 - 1 = 0, \text{ よって成立する。}$$

$$(4) (\Delta f)(x, n) = f(x+1, n) - f(x, n)$$

$$= \frac{(x+1)x(x-1)\dots\{(x+1)-(n-1)\}}{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1) \times n}$$

$$= \frac{x(x-1)(x-2)\dots\{x-(n-1)\}}{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1) \times n}$$

$$= \frac{x(x-1)(x-2)\dots\{x-(n-2)\}}{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1) \times n}$$

$$\times \{(x+1)-(x-(n-1))\}$$

$$= \frac{x(x-1)(x-2)\dots\{x-(n-2)\}}{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1)}$$

$$= f(x, n-1)$$

よって、成立する。

p は自然数, q は整数とし, p, q は互いに素とする。

1. 有理数 $\frac{2}{3}$ に対して, $p > 3$ ならば, 常に $\left| \frac{2}{3} - \frac{q}{p} \right| \geq \frac{c}{p}$ となるような正の定数 c を一つ見つけよ。

2. 有理数 $\frac{l}{k}$ (k は自然数, l は整数, k, l は互いに素) に対して, $p > k$ ならば, 常に

$$\left| \frac{l}{k} - \frac{q}{p} \right| \geq \frac{c}{p}$$

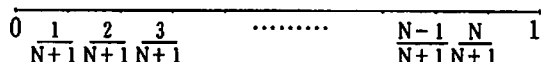
となるような正の定数 c の最大値を求めよ。

3. 正の無理数 θ に対して, $\left| \theta - \frac{q}{p} \right| < \frac{1}{p(p+1)}$...①となるような有理数 $\frac{q}{p}$ が無数にあることを次の手順で証明せよ。

(i) 正の実数 x に対して, (x) を x の小数部分とする。

自然数 N に対して, N 個の数 $(\theta), (2\theta), (3\theta), \dots, (N\theta)$ は下図のような区間 $(0, 1)$ の中に存在する。

($N+1$) 等分



上のことから, ある自然数 n ($1 \leq n \leq N$)

と整数 m に対して, $|n\theta - m| < \frac{1}{N+1}$ となることを証明せよ。

(ii) ①を満たす有理数が有限個であると仮定して, 矛盾を導け。

着眼点

ある有理数 α を既約分数 $\frac{q}{p}$ で近似するとき, p を十分大きくしても $\left| \alpha - \frac{q}{p} \right| \geq \frac{c}{p}$ (c は α によって定まる正の定数) となる。すなわち, $|p\alpha - q| \geq c$ であり, 有理数を有理数で近似するには限界があることを示している。

ところが, 無理数を有理数で近似するときは事情が変わる。①の両辺に p を掛けて $|p\theta - q| < \frac{1}{p+1}$ として見ると, 有理数 $\frac{q}{p}$ が無数に存在することから, 無理数の方が有理数より有理数近似の程度が良いことを示している。

このような問題を扱った数学の1分野をディオファントス近似論という。

3(i)の証明法は引き出し論法 (n 個の引き出しに $n+1$ 個のものを入れると, いずれか一つの引き出しに少なくとも2個入っている) と呼ばれ応用の

広い証明法である。

解答例

$$1. \left| \frac{2}{3} - \frac{q}{p} \right| = \left| \frac{2p-3q}{3p} \right| = \frac{|2p-3q|}{3p}$$

$2p-3q$ は整数だが, $2p-3q=0$ となるのは $\frac{q}{p} = \frac{2}{3}$ のとき限り, $p > 3$ ならば $|2p-3q| \geq 1$ となる。

故に $\left| \frac{2}{3} - \frac{q}{p} \right| \geq \frac{1}{3p}$ となる。よって $0 < c \leq \frac{1}{3}$ の一つを挙げればよい。

$$2. \left| \frac{l}{k} - \frac{q}{p} \right| = \left| \frac{lp-kq}{kp} \right| = \frac{|lp-kq|}{kp}$$

$lp-kq$ は整数だが, $lp-kq=0$ となるのは $\frac{l}{k} = \frac{q}{p}$ のときに限り, $p > k$ ならば $|lp-kq| \geq 1$ となる。

故に, $\left| \frac{l}{k} - \frac{q}{p} \right| \geq \frac{1}{kp}$ となる。よって, 正の定数 c

の最大値は $c = \frac{1}{k}$ となる。

3. (i) 自然数 n に対して, $n\theta$ の小数部分 ($n\theta$) は無理数である。いま, 区間 $\frac{i-1}{N+1} < x < \frac{i}{N+1}$ ($1 \leq i \leq N+1$) を $I_i = I_i\left(\frac{i-1}{N+1}, \frac{i}{N+1}\right)$ で表すことにする。

N 個の無理数 $(\theta), (2\theta), (3\theta), \dots, (N\theta)$ は, ($N+1$) 個の区間

$$I_1\left(0, \frac{1}{N+1}\right), I_2\left(\frac{1}{N+1}, \frac{2}{N+1}\right),$$

$$I_3\left(\frac{2}{N+1}, \frac{3}{N+1}\right), \dots, I_{N+1}\left(\frac{N}{N+1}, 1\right)$$

の中に, 分かれて入っている。 $n\theta$ の整数部分を q_n で表そう。すなわち, $n\theta = q_n + (n\theta)$ となる。 $q_n \geq 0$,

(i) I_1 に属する $(n\theta)$ があれば, $0 < n\theta - q_n < \frac{1}{N+1}$

(ii) I_{N+1} に属する $(n\theta)$ があれば, $\frac{N}{N+1} < n\theta - q_n < 1$, $\therefore -\frac{1}{N+1} < n\theta - q_n - 1 < 0$

よって, $|n\theta - (q_n + 1)| < \frac{1}{N+1}$

(iii) (i) も (ii) も起こらないとき, N 個の数が ($N-1$) 個の区間に分かれて入っているから, ある区間 I_i の中に少なくとも2個入っている。それらを $(n_1\theta), (n_2\theta) \in I_i$ ($2 \leq i \leq N, n_1 < n_2$) とすると,

$$|(n_2\theta) - (n_1\theta)| < \frac{1}{N+1}$$

$$\therefore |(n_2 - n_1)\theta - (q_2 - q_1)| < \frac{1}{N+1}$$

$$(1 \leq n_2 - n_1 \leq N-1)$$

故に, (i), (ii), (iii) を合わせて, $|n\theta - m| < \frac{1}{N+1}$ となるような自然数 n ($1 \leq n \leq N$) と整数 m が存在する。(証明終)

(ii) ①を満たす有理数が $\frac{q_1}{p_1}, \frac{q_2}{p_2}, \dots, \frac{q_k}{p_k}$ の k 個しかないと仮定する。

いま、自然数 $i (1 \leq i \leq k)$ のすべてに対して、
 $|p_i \theta - q_i| > \frac{1}{N+1}$ ……②となるような自然
 N を定める。

そのとき、(i)の結果から、 $|n\theta - m| < \frac{1}{N+1}$
 ……③となる自然数 $n (1 \leq n \leq N)$ と整数 m が存
 在する。

$\frac{1}{N+1} \leq \frac{1}{n+1}$ であるから、 $|n\theta - m| < \frac{1}{n+1}$

故に、 $\left| \theta - \frac{m}{n} \right| < \frac{1}{n(n+1)}$ ……④となる。

②と③から、有理数 $\frac{m}{n}$ は、 k 個の有理数 $\frac{q_i}{p_i}$ とは
 異なり、①を満たす。これは矛盾である。

従って、①を満たす有理数は無数に存在する。

(証明終)

第 6 回

北海道高等学校数学コンテスト 採点を終えて

昭和63年 1 月15日(金)実施

北海道算数数学教育会高等学校部会

第6回「数学コンテスト」を終えて

北数教高校部会長 黒 澤 耕 生

第6回を迎えた「数学コンテスト」は、全道から35校、320名の高校生諸君の参加により実施することができました。当日、問題に取り組む生徒諸君の意欲的で真剣な姿に接し、大いにたのもしさと嬉しさを感じた次第です。

この「数学コンテスト」は、数学に対する興味・関心を高め、同時に数学を勉強する本来の意義である基本的な概念や原理・法則などの理解の深化、論理的思考力の養成、創造的な考え方や処理能力の開発促進を目的として行われ、あわせて、生徒諸君の潜在する素質能力の発掘と向上を図ることをねらいとしています。

このコンテストを初めて実施した5年前、当時の部会長さんであった細川征一先生は次のように話しています。「コンテストは決して序列を決めるためや合格・不合格を判定するためにやるものではありません。数学という学問を愛しそして日頃まじめに勉強しておられる皆さんに、より広く高い見地から、いわば部活動の試合のように優劣を競いあってほしいのです」と。

このコンテストの意義を端的に表わした言葉ですが、どうかこの趣旨を受けて今回秀れた成績をおさめた人は大いに自信をもってさらに精進してほしいし、皆さん、学校に帰って数学を愛する同好の人たちをふやし互いに励まし合いながら勉強してほしいと思います。来年も多くの人が参加されるよう期待しています。

終りになりましたが、北海道教育委員会、札幌市教育委員会、北海道高等学校長協会より賜りました御後援、ならびに、北海道新聞社、福武書店の物心にわたっての御高配に深甚の謝意を表しますとともに、本年もまた、出題・採点から運営全般について御苦勞頂きました大学や北数教高校部会研究部を中心とした諸先生に深く感謝申しあげる次第です。

●成績優秀者

平 間 順 宏	橋 本 徹	小 松 秀 平	小 田 隆 之
大 島 環	遠 山 浩 一	坂 口 英 一	園 田 範 和
米 山 桜 子	加 藤 公 一	中 西 正 志	間 山 健 太 郎
築 詰 徹 彦	大 島 道 子	茶 谷 達 也	栗 原 真 治
山 口 毅	吉 川 雅 子	大 石 昌 之	鹿 内 一 寛

第 6 回 北海道高等学校数学コンテスト

度 数 分 布 表

階 級	問 1	問 2	問 3	問 4	問 5	階 級	合 計
40 - 40	26	75	7	67		190 - 199	
38 - 39		19	1	4		180 - 189	2
36 - 37	2	12	1			170 - 179	4
34 - 35	9	6	18	3		160 - 169	4
32 - 33	4	21	13	6		150 - 159	4
30 - 31	6	9	7	15	3	140 - 149	6
28 - 29	1	9		5		130 - 139	12
26 - 27	4	10		18	1	120 - 129	8
24 - 25	8	34	1	3		110 - 119	14
22 - 23	9	18	2	18		100 - 109	14
20 - 21	5	26	49	51	4	90 - 99	24
18 - 19	6	19	3	1	2	80 - 89	25
16 - 17	7	11	2			70 - 79	29
14 - 15	12	10		1	4	60 - 69	29
12 - 13	4	5	78	7	3	50 - 59	34
10 - 11	16	10	4	16	7	40 - 49	35
8 - 9	9	5	3		7	30 - 39	25
6 - 7	5	3	27		6	20 - 29	28
4 - 5	29	9	35	4	20	10 - 19	13
2 - 3	6	6	11	3	27	0 - 9	9
0 - 1	151	2	57	97	235	- -1	
人 数	319	319	319	319	319	人 数	319
合 計	3,260	8,489	4,088	6,018	662	合 計	22,517
平 均	10.2	26.6	12.8	18.9	2.1	平 均	70.6
S · D	13.37	14.82	13.98	14.35	14.35	S · D	39.77

1

円周の長さが1である円の中を円周上の点Aから動点Pが直進し、円周上の点 $B_1, B_2, \dots$ にぶつかるごとに図のように反射して方向を変える。次の問に答えよ。

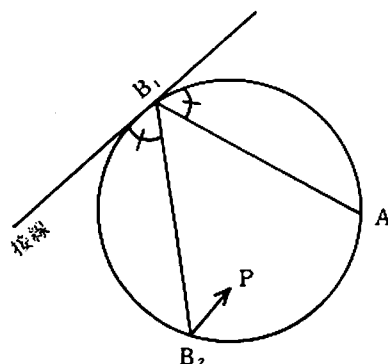
(点 B_1 は動点Pが最初ぶつかる点、点 B_2 は2回目ぶつかる点、…点 B_n は n 回目ぶつかる点を表す。)

(1) 弧 AB_1 の長さが $\frac{3}{7}$ であったとき、点 B_n で点Aと重なるという。 n の最小値を求めよ。

(2) 弧 AB_1 の長さが r ($0 < r < 1$) のとき、次の(ア)(イ)を説明せよ。

(ア) r が有理数なら、必ず点Aに戻ってくる。

(イ) r が無理数なら、点Aには戻ってこない。



講評

配点は、(1)15点(答えだけでは5点)、(2)(ア)が10点、(イ)を15点としました。

満点(40点)をとった生徒も多くでしたが、逆に0点の生徒もかなりいました。得点から考えると、できるかできないかハッキリとする問題だったようです。

(1) について、「解答と解説」より次の三点をポイントとして答案をみました。

① 弧 AB_1 = 弧 B_1B_2 = …… 弧 $B_{n-1}B_n = \frac{3}{7}$

② 弧 AB_1 + 弧 B_1B_2 + …… + 弧 $B_{n-1}B_n = \frac{3}{7}n$

③ $n = 7$ が求まっている。

説明不足の解答もかなりありましたが、余計なことを書きすぎている答案も少なくありませんでした。何がポイントで、何が不要なのかしっかりと見抜いた答案を作ってください。

(2) について、(ア)は(1)を一般化した問題なので、(1)が正解だった生徒はほとんどできていました。ただし、(1)で説明不足のため減点となった解答もありました。

解答の中で「有理数 $\times n$ = 自然数となる自然数

n が存在するので…」と書いている生徒がかなりいましたが、式で表現していないのは減点の対象としました。数学の試験なので、式で表せるところは式で表してください。

(イ)は背理法を用いることが大きなポイントとなりました。直接証明しようとする「無理数 $\times$ 自然数 $\neq$ 自然数なので…」というような解答になります。明かなことだと思いますが、この問題を解く1つのkeyなので証明が必要です。

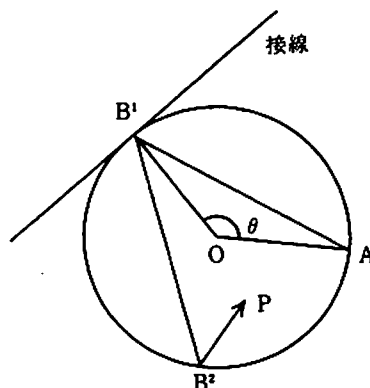
証明は簡単なので考えてみてください。

「 r は無理数なので、 $r = \sqrt{a}$ とおくと…」と早合点している答案もありましたが、無理数は $\sqrt{\quad}$ だけではないので注意してください。

解答

正解となった解答は、根本的には「解答と解説」と同じです。ただ中心角に目をつけた解答もあるので、その解答を示しておきます。

(1) 円の中心をOとし、角 $AOB_1 = \theta$ とする。



弧 $AB_1 = \frac{3}{7}$ だから、

$$\theta : 2\pi = \frac{3}{7} : 1 \quad \therefore \theta = \frac{6}{7}\pi$$

ところで、弧 $B_{n-1}B_n = \frac{3}{7}$ ($n \geq 2$ の自然数)だから、角 $B_{n-1}OB_n = \theta$ となる。

ゆえに、点 B_n が点Aと重なるためには

$$\left(\frac{6}{7}\pi\right)n = (2\pi)k \quad (k: \text{自然数})$$

を満たせばよい。

この式を変形して、

$$\frac{3}{7}n = k$$

これを満たすには、 n が7の倍数であればよい、よって、求めるのは最小値であるから、

$$n = 7$$

(2) (ア) r が正の有理数なので、

$$r = \frac{p}{q} \quad (p, q: \text{自然数}) \text{ とおくことができる。}$$

このとき、(1)と同様に考えると、

$$\left(\frac{2p}{q}\pi\right)n = (2\pi)k \quad (k: \text{自然数})$$

すなわち、 $(\frac{q}{p}) n = k$ を満たせばよい。

よって、 $n=p$ のとき点 A に戻ってくる。

(イ) 点 A に戻ってくると仮定すると、

(1)と同様に考えて $(r \cdot 2\pi) n = (2\pi) k$ (k : 自然数) を満たすことになる。

しかし、 $r = \frac{k}{n}$ となり、これは r が無理数であることに反する。

よって、点 A には戻ってこない。

2

解答用紙にある図形は共通部分が頂点 A だけの正方形 ABCD 正方形 AEFG であり $AD = 2AE$ となっている。

解答に必要な図は free hand でよいから、この図に加えること。

問 1: ED を一辺として前の 2 つの正方形とは E, D の外に共通部分が無いように正方形 EDIJ を書け。

以下 $\angle AED = \alpha$, $\angle ADE = \beta$ とする。

問 2: $\triangle EAD$ を E 中心に 90° 回転して ED を EJ に重ね A の移った点を A' とする。次を証明せよ。

(問 2 の図は問 1 の図に加えること)

(1) F, E, A' は一直線上にある。

(2) $A'F = A'J$

(3) $\angle JFE = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$

問 3: BG を一辺として前の 3 つの正方形とは B, G の外に共通部分が無いように正方形 BGMN を書け。

問 4: $\triangle AGB$ を G 中心に 90° 回転して GB を GM に重ね A の移った点を A'' とする。次の証明をせよ。

(問 4 の図は問 3 の図に加えること)

(1) F, G, A'' は一直線上にあって

$A''M = A''F$

(2) $\angle GA''M = \alpha + \beta$

(3) M, F, J は一直線上にある。

I. 配点

問 1: 図 2 点

問 2: 図 2 点

問 2: (1) 4 点 (2) 4 点 (3) 8 点

問 3: 図 2 点

問 4: 図 2 点

問 4: (1) 4 点 (2) 4 点 (3) 8 点

総計 40 点満点

講評

II. 図を書くことについて

図は free hand を認め、特に粗末でない限り 2 点を与える。これはコンテストで初等幾何の問題(解答はどんな方法でもよい)採点の基本方針である。生徒は“文章の意味に合致する図を書くこと”に不得手である。それは

文章の意味を正確に把握する能力に欠けている。

文章の意味を適確に図表現する訓練が不足である。

の 2 つの原因の為と判断する。

それで、最終的に式や文章がなくても、図だけで満点の二割を与えることにしたのである。

このコンテストに参加した生徒が、その為に積極的に図を書くようになる要因にでもなってくればという配慮によるのである。

ここで逆に注意しなければならないのは“図に書いておけば説明の必要がない”と考えている生徒が可成り居ることである。これは“図のように”“図の通り”“図によって”などの悪用されたものと考えられる。

“問題文、或は与えられた図に無い点(点の名称)直線(線分につける文字)、角(その表現)などをつけ加えるときには必ず説明も同時に加えなければならない。”この原則は厳守すること。

これは一人一人の紙に書いておいた。

III 出題の意図

原題は難問奇問の一つで問題文の中から問 2 全部と問 4 (1)(2)を除いたものと思えばよい。

最上の解答方法は正方形が多いので 90° 回転によるものである。原題のままでは無理、委員の一人からの貴重なアドバイスをいれて、このような形にしたのである。ここで似て非なる穴埋式出題につき意見を述べておく。あれは入試やコンテストなどの問題としては最悪である。然し学習として証明文の書き方や証明手段に馴れさせる為であれば有効であり、またその効果も十分である。

IV. 表現方法など

表現は、できるだけ文章を少なく、式を主とし、それもできるだけ簡潔が望ましい。が、この表現については、初等幾何から離れてしまった高校生には止むを得ないことと反って同情する。以下はその表現法に関する注意である。

(1) 此度は回転移動であったが一般に平行移動対称移動も含めて、これらの移動では元の図形をそのまま形、大きさを変えないで位置だけ移すのであるから元の図形と移された図形は合同であること

は始めからきまっている。問2の(2)などで合同の証明に時間を多く使った者が居た。骨折り損のくたびれもうけ、ということで気の毒であった。

(2) (1)と同じようなことだが、 90° 回転によって対応する線分の作る角は 90° にきまっている。これを直ぐ使った者は時間の経済であった。

(3) 角度を表わす $^\circ$ を忘れる者が意外に多くあったが、その気持はよく解る。先に数値を書いておいて後でつける積りが忘れてしまった、という訳。これは減点の対象にはしなかった。点の文字の肩につける $'$ も $^\circ$ ほどでないが可成あった。

(4) 問題文中にない角を一文字で表わすのに $\angle a$, $\angle b$ (ローマ小文字に $\angle$ をつけるのは中学で認めている。)はよいとして $\angle P$, $\angle Q$ とか、またローマ小文字1つ x などにするのが目立った。何を使ってもならないという規則はないが混雑を避ける為にも、この問題ではギリシャ小文字1字 ($\angle$ はつけなくてもよい) γ , δ などを使った方がよい。

(5) ある線分を延長させる表現も正確でない者が可成り居た。またその延長上に一点をとるときにもその点を l , m などとする者が居た。そしてこれを使って $\angle lAB$, $\angle lAm$ とする。普通は l , m は直線を表わすので、やはり混乱の元となる。この問題では点をローマ字一字で表わすのが無難である。つけ加えておくが学者の専門書(初等幾何学)やフランスの教科書では、これにこだわってはいない。

(6) 角の計算式に、いきなり 180° , 90° を何のこともなしに出している者も多かった。

図の中には 180° , 特に 90° は多くあるからどの角かを明らかにしてから式で使う事が正しい。

以上について採点者は答案紙に注意はしたが減点はしなかった。それは受験生の考え方に重点を置きできるだけ点を与えることにした為であるが、これによって入試などでルーズにされては困る。

(7) 中線を角の2等分線と混同している者も数名居た。これは重大な誤りであるから、はっきり区別をするように。

V. 問4(1)について

ここは、問2の(1), (2)をまとめて出した所である。 $^{\circ}$ F, G, A"が一直線上にある"の証明を終えて安心したのか $A''M=A''F$ の証明を忘れる者が目立った。その為に満点を失う者も居て残念であった。反対に $A''M=A''F$ を先に証明する者。これは完全な誤りである。

VI. 興味ある着眼例

スペースの関係で図は示されないが、これらはどの者も解答の中で独自に図形移動を使っている。さなきだに心せわしいテスト中に図形移動を使うという、その態度が嬉しくて気に入った。が、この生徒達を指導した中学の先生方に敬意を表する。

30番 木村君 問4(2)

DAの延長上に1点Pを $PA=AD$ になるようにとる。 $\triangle EAP$ をA中心にして 90° 回転すれば $\triangle GAB$ に重なる。

$$\angle A'' = \angle GAB = \angle EAP = \alpha + \beta$$

答案通りではないが要点を書いた。以下同様

63番 小川君, 122番 岡崎君 問2(1)

$\triangle AEF$ をE中心にして 90° 回転すれば $\triangle A'EA$ になることに注目した。

116番 武田君 問2(3)

A'を通りFJに平行線を引きJIとの交点をKとし、FA'の延長とIDとの交点をLとすれば $\angle JA'L = \alpha + \beta$

$$\angle JA'K = \angle A'JF, \angle KA'L = \angle JFE$$

上の関係から $2\angle JFE = \alpha + \beta$ を出す。

171番 大浦君 問2(3)

FA'の延長線上に1点Kを $FA'=A'K$ になるようにとる。円の性質を利用して

$$FA'=A'K=JA', \angle FJK=90^\circ \text{ など} \dots$$

178番 中西君 問2(3)

A'からFJに垂線を下し交点をHとする $A'F=A'J$ を利用した。

184番 高橋君 問2(3)

A'Jの中点をKとして中点連結の定理を使った。

269番 中村君, 308番 武藤君 問4(3)

$\triangle AED$ をA中心にして 90° 回転してADをABに重ねる。Aの移った点をA''' (中村) E' (武藤) にする。

$$\angle A'' = \angle GAB = \dots \alpha + \beta \text{ となる。}$$

VII. 色々書いたが出題者、採点者の感想としては中学校で習った図形問題(初等幾何)に対して数学に自信のある受験生とはいえ、これだけ解答したということは中学校を離れて9ヶ月にもなるのに図形に興味を今にいたるまで持ち続けているという実証になり、これら受験生を指導された中学校の先生方に改めて脱帽するとともに受験生全員に大きな親近感と信頼感を持ったと述べておく。

3

数 $1, 2, 3, \dots, n$ を全部同時にとりあげて一列に並べる。(これを異なる n 個のものから n 個とする順列という) その順列の中でどの数字 k に対しても数字 k が k 番目にないものを「かく乱順列」という。例えば $n=3$ のとき $3, 1, 2$ はかく乱順列である。

(1) n 個の数のかく乱順列の総数を $D(n)$ で表す。このとき $D(3), D(4), D(5)$ を求めよ。

(2) $D(8)$ を求めよ。ただし $D(6)=265, D(7)=1854$ であることを用いてもよい。

講評

「かく乱順列」という耳なれないことばによって敬遠してしまった人もいたかもしれない。しかし(1)によって実際に数字を並べて実例を作り、どのような規則性があるかを探していくと、意外に素直に道が広がっていく問題だと思う。「確率・統計」の順列・組合せの知識を使った人もいたが、使わなくても求められる。数列の知識はあった方がよいが、不可欠ではない。

(1)は実例を上げて数え上げていく問題で正解者は多かった。 $D(3), D(4)$ は全て数え上げた人も $D(5)$ のときは1番目の数が2のとき、3のとき、…と同様に得られると気がついたことだろう。

(2)は $D(3), D(4), \dots$ の並び方から関係式

$$\begin{cases} D(2n) = D(2n-1) \times 2n + 1 & (\text{偶}) \\ D(2n+1) = D(2n) \times (2n+1) - 1 & (\text{奇}) \end{cases}$$

または $D(n+1) = n(D(n) + D(n-1))$ が成りたつと予想した人が多かった。しかしなぜこのような式が成立するのかまで考えた人は少なかった。

解答と同じ方法で(2)を正解した者は5名である(受験番号71, 111, 143, 226, 307の諸君)また、順列の知識を用いて全ての順列の中からかく乱でないものを除くという方法で正解に到ったのは5名である(106, 138, 144, 174, 312の諸君)なお帰納法を試みた者、 $\frac{D(n)}{n!}$ による近似を用いた者もいたが正解には到らなかった。

最後にもっとユニークな解答を紹介しよう。残念ながら完全ではないが発想はすばらしかった。

〔306番の受験者〕

(1) $D(3)$ を求める

(①②③) これを①は2に②は3に③は1にというようにみると、このかく乱順列によって $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ という巡遊ができる。かく乱順列になるためには $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$ のような巡遊がいくつできるかを考えればよいので円順列(確率・統計でやる)の考え

方によって $(3-1)! = 2 \times 1 = 2$ より2通り

$D(4)$ を求める

このときは(①②③④)のように $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ の巡遊ができる場合(長さ4の置換という)と(①②③④)のように $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4$ の2つの巡遊の組み合わせの(長さ2の置換)

場合の2つがある(1個と3個はありえない)ので

☆長さ4のとき $(4-1)! = 3! = 6$

☆長さ2が2つあるとき、(2つを区別しないので)

$$\frac{1}{2} \cdot C_2 \times [(2-1)!]^2 = 3$$

よって $D(4) = 6 + 3 = 9$

以下略するが、この考えは大学で勉強する代数学の中に現れる「置換」という重要な概念に近づいている。方法としてもおもしろい。

どんな試験でもそうだが、採点者は受験者がどのような発想で解いたかを知りたがっている。特に(2)のような問題では答だけではダメです。

4

x についての n 次の多項式、 $f(x, n) (n=0, 1, 2, \dots)$ を次のように

$$f(x, 0) = 1, f(x, 1) = x, f(x, 2) = \frac{x(x-1)}{2}$$

一般に、 $f(x, n) =$

$$\begin{cases} 1 & (n=0 \text{ のとき}) \\ \frac{x(x-1)(x-2) \cdots \{x-(n-1)\}}{1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n} & (n=1, 2, 3, \dots \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定める。

また、多項式、 $f(x, n)$ に対して、

$(\Delta f)(x, n)$ を

$(\Delta f)(x, n) = f(x+1, n) - f(x, n)$ とおく。このとき、次の式が成立することを示せ。

$$(1) f(x+y, 2) = f(x, 0) \times f(y, 2) + f(x, 1) \times f(y, 1) + f(x, 2) \times f(y, 0)$$

$$(2) f(x, n) = f(x-1, n-1) + f(x-1, n) \quad (n=1, 2, 3, \dots \text{ のとき})$$

$$(3) (\Delta f)(x, 0) = 0$$

$$(4) (\Delta f)(x, n) = f(x, n-1) \quad (n=1, 2, 3, \dots \text{ のとき})$$

講評

(1) 多項式 $f(x, n)$ について、 $n=0, 1, 2$ のとき

$$f(x, 0) = 1, f(x, 1) = x, f(x, 2) = \frac{x(x-1)}{2}$$

と具体的に例示してあるにもかかわらず問(1)を理解できていない人が多かった。時間が充分あるのだから、ゆっくり問題文を読み解いてほしい。

- (2) 多項式 $f(x-1, n-1)$, $f(x-1, n)$ についての理解が不十分であった。この問題 4 の中で、問(2)が一番出来が良くなかった。

$f(x-1, n-1)$ の分子は
 $(x-1)(x-2)(x-3)\cdots$

$$\times \{(x-1)-(n-4)\}$$

$$\times \{(x-1)-(n-3)\}$$

$$\times \{(x-1)-(n-2)\}$$

であることに注意する。

自然数 n についての数学的帰納法で証明しようとした人がいたが、皆失敗していました。

- (3) 問(3)が一番出来が良かった。

定義より、 $n=0$ のとき、 $f(x, 0) = 1$ であるから、良く考えれば、理解が可能と思われる。

- (4) 問(2)の次に、問(4)の出来が良くなかった。

下の解答例のように、(2)を用いて証明していたのは12名程だが、大部分の人は、問(2)と同様に因数分解を利用して解いていた。もっと多くの人が(2)を利用して解くものと予想していたが、以上の結果であった。

なお、全般的に、予想通り高得点であった。

解答例

$$(1) \text{ 左辺} = \frac{(x+y)(x+y-1)}{2} \quad \text{①}$$

$$f(x, 0) = 1, f(y, 2) = \frac{y(y-1)}{2}, f(x, 1) = x,$$

$$f(y, 1) = y, f(x, 2) = \frac{x(x-1)}{2}, f(y, 0) = 1$$

より

$$\text{右辺} = \frac{y(y-1)}{2} + xy + \frac{x(x-1)}{2}$$

$$= \frac{(x+y)(x+y-1)}{2} \quad \text{②}$$

①, ②より成り立つ

(2)

右辺

$$= f(x-1, n-1) + f(x-1, n)$$

$$= \frac{(x-1)(x-2)(x-3)\cdots\{(x-1)-(n-3)\}\{(x-1)-(n-2)\}}{1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n-1)}$$

$$+ \frac{(x-1)(x-2)(x-3)\cdots\{(x-1)-(n-2)\}\{(x-1)-(n-1)\}}{1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n}$$

$$= \frac{(x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-n+1)\{n+(x-n)\}}{1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n}$$

$$= \frac{x(x-1)(x-2)\cdots\{x-(n-1)\}}{1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n}$$

$$= f(x, n)$$

= 左辺

よって、成り立つ

(3)

$$(\Delta f)(x, 0) = f(x+1, 0) - f(x, 0)$$

$$= 1 - 1$$

$$= 0$$

よって成り立つ

(4)

$$(\Delta f)(x, n) = f(x+1, n) - f(x, n)$$

$$= f(x, n-1) + f(x, n) - f(x, n)$$

$$= f(x, n-1)$$

= 右辺

$$\text{((2)より } f(x+1, n)$$

$$= f(x, n-1) + f(x, n)$$

よって、成り立つ。

追記

- (1) $f(x, n)$ について、 x が自然数のとき、組合せの総数

$${}_xCn = \frac{x!}{(x-n)!n!}$$

と一致する。

$x = 1, 2, 3, \dots$ のとき、 ${}_xCn$ に多くの人が気がついていたのかも知れないが、答案に書いてあったのは、橋本徹君、小松秀平君、平間順宏君の3名であった。採点者としては、大感激であった。一般的には、 x が任意のとき $x!$ を定着しなければならない。

$$(2) (\Delta f)(x) = f(x+1, n) - f(x, n)$$

について、 x が自然数のとき、差分法における差を表す。

$$x^{(n)} = x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)$$

(n 個の積)

とおくとき、

$$\Delta x^{(n)} = nx^{(n-1)}$$

という関係が成り立つ。

(微分法の $\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$ に似ているネ)

興味のある人は差分法と和分法を勉強して下さい。

1988. 2. 2. Tues. K.N 記

5

p は自然数, q は整数とし, p, q は互いに素とする。

1. 有理数 $\frac{2}{3}$ に対して, $p > 3$ ならば, 常に

$$\left| \frac{2}{3} - \frac{q}{p} \right| \geq \frac{c}{p} \text{ となふような正の定数 } c \text{ を見つけよ。}$$

2. 有理数 $\frac{l}{k}$ (k は自然数, l は整数, k, l は互いに素) に対して, $p > k$ ならば, 常に

$$\left| \frac{l}{k} - \frac{q}{p} \right| \geq \frac{c}{p}$$

となるような正の定数 c の最大値を求めよ。

3. 正の無理数 θ に対して,

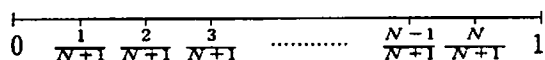
$$\left| \theta - \frac{q}{p} \right| < \frac{1}{p(p+1)} \cdots \cdots \textcircled{1}$$

となるような有理数 $\frac{q}{p}$ が無数にあることを次の手順で証明せよ。

- (i) 正の実数 x に対して, (x) を x の小数部分とする。

自然数 N に対して, N 個の数 $(\theta), (2\theta), (3\theta) \cdots, (N\theta)$ は下の図のような区間 $(0, 1)$ の中に存在する。

($N+1$) 等分



• 上のことから, ある自然数 $n (1 \leq n \leq N)$ と整数 m に対して, $|n\theta - m| < \frac{1}{N+1}$ となることを証明せよ。

- (ii) ①を満たす有理数が有限個であると仮定して, 矛盾を導け。

講 評

5 題の中で平均点が一番低い問題になりました。最高点が30点で, 高得点者の中にすばらしい解答が見られました。岩見沢東の坂口君, 滝川の平間君, 札南の小松君, 小田君, 橋本君(1年), 札北の栗原君, 札東の和地君, 札西の遠山君などは卓越した思考力を持っていると思います。

この問題の1, 2は, 条件を満たすすべての p, q について常に成立する正の定数 c を見つけるという問いでしたが, 問題文の説明が不足していたかと思えます。解答者の中には, c の範囲を q を用いて表していた人が多くおりました。問題文はできるだけ詳しく, 誤解のないように心掛けなければならないことを痛感しました。

2. の対偶は, ある数が無理数であることを証明するときにはしばしば使われる。最近の例では,

$$\xi(3) = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \cdots + \frac{1}{n^3} + \cdots$$

が無理数であることが上記のことを使って証明されている。 $|p\xi(3) - q|$ が, 0 に近づくような整数の組 (p, q) が無数に存在することを示したのである。

3. の最良な評価は, 無理数 θ に対して,

$$\left| \theta - \frac{q}{p} \right| < \frac{1}{5p^2} \text{ となる有理数 } \frac{q}{p} \text{ は}$$

無数に存在する。ことが証明されている。

解答例

$$1. \quad \left| \frac{2}{3} - \frac{q}{p} \right| = \frac{|2p-3q|}{3p}$$

$2p-3q$ は整数であるが, $2p-3q=0$ とはならない。なぜなら, $2p-3q=0$ のとき, $2p=3q$, $p=3r$, $q=2r$ (r は自然数) となり, $p > 3$ ことから, $r > 1$, よって, p, q が互いに素であることに反する。故に, $|2p-3q| \geq 1$ 。

実際に, $2p-3q=\pm 1$ となる整数の組 (p, q) は無数にある。 $(p, q) = (3r+2, 2r+1), (3r+1, 2r+1)$ (r は自然数) は, $2p-3q=\pm 1$ となっている。

$$\left| \frac{2}{3} - \frac{q}{p} \right| \geq \frac{1}{3p} \geq \frac{c}{p}$$

だから, $0 < c \leq \frac{1}{3}$ の中の1つを挙げればよい。(10点)

$$2. \quad \left| \frac{l}{k} - \frac{q}{p} \right| = \frac{|lp-kq|}{kp}$$

$lp-kq$ は整数であるが, $lp-kq=0$ とはならない。 $lp-kq=0$ とすると, $lp=kq$, k と l は互いに素だから, $p=kr$, $q=lr$ (r は自然数) $p > k$ より, $r > 1$. よって, p, q が互いに素であることに反する。故に, $|lp-kq| \geq 1$. $lp-kq$ ($p > k$, q は整数) のとる値の中で, 正の最小値を d (≥ 1) とする。 $d = lp_0 - kq_0$, いま, $lp-kq$ が d の倍数でないとする, d で割った商を Q , 余りを R とすると,

$$lp-kq = dQ + R \quad (0 < R < d)$$

$$lp-kq - (lp_0 - kq_0)Q = R$$

$$l(p-Qp_0) - k(q-Qq_0) = R$$

$$l(p-Qp_0+kn) - k(q-Qq_0+ln) = R$$

(n は整数), ある整数 n をとって,

$p-Qp_0+kn > k$ とできるから, d より小さい値 R をとることになる。これは矛盾。

故に, $lp-kq$ は d の倍数である。

$lp-kq$ のとる値の中には, k も l も含まれているから, d は k, l の公約数, k と l は互いに素だから, $d=1$ 。

いま, $lp_0 - kq_0 = 1$ とすると,

$$l(p_0+kn) - k(q_0+ln) = 1 \quad (n \text{ は自然数}),$$

$$\text{また, } l(-p_0) - k(-q_0) = -1 \text{ より}$$

$$l(-p_0+kn) - k(-q_0+ln) = -1$$

よって、 $lp - kq = \pm 1$ となる p, q は無数にある。故に、

$$\left| \frac{l}{k} - \frac{q}{p} \right| \geq \frac{1}{kp} \quad \therefore c = \frac{1}{k} \quad (10\text{点})$$

3. (i) N 個 $(\theta), (2\theta), (3\theta) \dots (N\theta)$ はすべて異なる無理数で、区間 $(0, 1)$ に入っている。この区間 $(0, 1)$ を $(N+1)$ 等分した小区間を

$$I_1 = (0, \frac{1}{N+1}), I_2 = (\frac{1}{N+1}, \frac{2}{N+1}), \dots, I_i = (\frac{i-1}{N+1}, \frac{i}{N+1}) \dots, I_{N+1} = (\frac{N}{N+1}, 1) \text{ とおく。}$$

$n\theta$ の整数部分を q_n とおくと、 $n\theta = q_n + (n\theta)$ (n は自然数)。

(i) ある自然数 $n (1 \leq n \leq N)$ に対して、 $(n\theta) \in I_1$ ならば、

$$0 < (n\theta) < \frac{1}{N+1}$$

$$\therefore 0 < n\theta - q_n < \frac{1}{N+1}$$

$$\text{故に、} |n\theta - q_n| < \frac{1}{N+1}$$

(ii) ある自然数 $n (1 \leq n \leq N)$ に対して、 $(n\theta) \in I_{N+1}$ ならば、

$$\frac{N}{N+1} < (n\theta) < 1$$

$$\therefore \frac{N}{N+1} < n\theta - q_n < 1$$

$$-\frac{1}{N+1} < n\theta - q_n - 1 < 0$$

$$\text{故に、} |n\theta - (q_n + 1)| < \frac{1}{N+1}$$

(i) (i) も (ii) も起こらないとき、 N 個の数 $(\theta), (2\theta), (3\theta), \dots, (N\theta)$ は $(N-1)$ 個の区間 $I_i (2 \leq i \leq N)$ の中に入っている。そのとき、ある区間 I_i の中に少なくとも 2 個入っていなければならない。それらを $(n_1, \theta), (n_2, \theta) \in I_i (1 \leq n_1, n_2 \leq N, n_1 < n_2)$ とする。

$$\frac{i-1}{N+1} < n_1\theta - q_{n_1} < \frac{i}{N+1}$$

$$\frac{i-1}{N+1} < n_2\theta - q_{n_2} < \frac{i}{N+1}$$

$$\therefore -\frac{1}{N+1} < (n_2 - n_1)\theta - (q_{n_2} - q_{n_1}) < \frac{1}{N+1}$$

$$\text{故に、} |(n_2 - n_1)\theta - (q_{n_2} - q_{n_1})| < \frac{1}{N+1}$$

$$\text{ここで、} 1 \leq n_2 - n_1 \leq N - 1.$$

(i), (ii), (iii) を合わせて、ある自然数 $n (1 \leq n \leq N)$

と整数 m があって、(i) $|n\theta - m| < \frac{1}{N+1}$ となる。

(ii) ① を満たす有理数が、

$\frac{q_1}{p_1}, \frac{q_2}{p_2}, \dots, \frac{q_k}{p_k}$ の k 個しかないとする。いま、自然数 $i (1 \leq i \leq k)$ のすべてに対して、

$$|p_i\theta - q_i| > \frac{1}{N+1} \dots \text{②}$$

$$\text{となるように自然数 } N \text{ を定めると、(i) の結果から、}$$

$$|n\theta - m| < \frac{1}{N+1} \dots \text{③ となる自然数 } n (1 \leq n \leq N) \text{ と整数 } m \text{ が存在する。}$$

$$\frac{1}{N+1} \leq \frac{1}{n+1}$$

であるから、

$$|n\theta - m| < \frac{1}{n+1}.$$

故に、

$$|\theta - \frac{m}{n}| < \frac{1}{n(n+1)} \dots \text{④}$$

となる。有理数 $\frac{m}{n}$ が既約分数でないならば、約分

して、 $\frac{m_1}{n_1}$ であったとすると、 $n_1 \leq n$ より、

$$\frac{1}{n(n+1)} \leq \frac{1}{n_1(n_1+1)} \text{ よって、}$$

$$|\theta - \frac{m_1}{n_1}| < \frac{1}{n_1(n_1+1)}.$$

②, ③ から、有理数 $\frac{m_1}{n_1}$ は、 k 個の有理数 $\frac{q_i}{p_i}$ とは異なり、① を満たす。これは矛盾である。

従って、① を満たす有理数 $\frac{q}{p}$ は無数に存在する。

(証明終) (20点)

担 当 委 員

坂	下	正	雄	中	西	勝	範
佐々	木	光	憲	古	川	政	春
鈴	木	雅	博	松	本	陸	郎
棚	橋		純	皆	川	一	雄
中	居	基	昭	湊	川	三	竿
長	尾		章	大	和	達	也
中	田	保	之	和	田	文	興
永	淵	敬	二				