

第 7 回
北海道高等学校数学コンテスト

問 題

昭和64年 1 月15日(日)

9 時00分～12時30分(210分)

北海道算数数学教育会高等学校部会

問題 1 自然数の掛け算を、昔のロシアの農民は(イ)2で割ること（ただし余りは捨てる）(ロ)2倍すること(ハ)加えることの(イ)(ロ)(ハ)の組み合わせで下の例のように計算をしていた。

$35 \times 28 = 980$ の例

(イ)	35 28	(ロ)	
	17 56		(2倍する)
(2で割る)	8—112	(ハ)	
ただし余り	4—224	(左の数が偶数のときは、右の数を消去し、残りを加える)	
は捨てる)	2—448		
	↓ 1 896 ↓		
	980		(ハ)

$35 \times 28 = 28 + 56 + 896 = 980$

- (1) 45×28 を上例の例にならって書き、答えを求めよ。
- (2) 78×30 , 29×43 についても、同様に計算せよ。
- (3) なぜ正答が得られるのか、上の例を使って説明せよ。

問題 2 正方形 $ABCD$ がある。対角線 AC , BD の交点を O とする。線分 AO の中点を E とし、直線 DE と AB の交点を F とする。次の各問を証明せよ。

{各問毎に必要な図は必ず書いておくこと free hand でよい。}

- (1) $AF : FB = 1 : 2$
- (2) $\angle AFE = \angle BFO$
- (3) $DE = EF + FO$

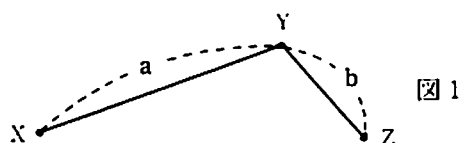
問題 3 2つの線分を、自由に曲げることのできる関節でつなげた折れ線を、 XYZ とおく。線分 XY 、線分 YZ の長さをそれぞれ a 、 b とおく(図1)。次の問において、折れ線はある平面 α 内だけを動く。次の問に答えよ。(図には簡単な説明をつけないさい。)

- (1) 折れ線 XYZ の X を、平面 α 内の定点 A に取り付けた。折れ線 XYZ は、 X が A にくっついたまま平面 α 内を自由に動ける。 a 、 b の値が次の(ア)、(イ)、(ウ)であるときの、折れ線の先端 Z の到達範囲(領域)をそれぞれ図示せよ。

(ア) $a = 6$ 、 $b = 2$

(イ) $a = 2$ 、 $b = 6$

(ウ) $a = 4$ 、 $b = 4$



- (2) $a = 10$ 、 $b = 2$ とする。折れ線 XYZ を平面 α 内の定点 A に取り付けたが、取り付け方が悪いため、線分 XY は点 A を中心としたある 90° の範囲しか動けなかった(解答用紙の図の2つの半直線 AS 、 AT の間の範囲)。このときの折れ線 XYZ の先端 Z の到達範囲を図示し、この部分の面積を求めよ。ただし、関節 Y においては自由に曲げられるものとする。
- (3) $a = 10$ 、 $b = 2$ とする。平面 α 内に2点 A 、 B があり、 A 、 B 間の距離は16である。 XYZ と同じ折れ線を2組用意して、それらを $X_1Y_1Z_1$ 、 $X_2Y_2Z_2$ とおく。いま X_1 を点 A に取り付け、 X_2 を点 B に取り付ける。2つの折れ線は、取り付けられた点のまわりに平面 α 内を自由に動けるものとする。次に2つの折れ線の先端 Z_1 と Z_2 を関節でつなぐ。このとき $Z_1 (= Z_2)$ の到達範囲を図示せよ。ただし関節 Y_1 、 Y_2 、 $Z_1 (= Z_2)$ においては自由に曲げられるものとする。

問題 4 複素数の中で虚数部分が正であるものの全体を集合 H で表す。すなわち、 $H = \{z = x + yi \mid x, y \text{ は実数, } y > 0\}$ (ただし i は虚数単位で、 $i^2 = -1$ なるもの) である。

いま、 H を定義域とする関数 $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ (ただし a, b, c, d は整数で、 $ad - bc = 1$) を考えよう。

- (1) $f(i) = i$ となる関数 $f(z)$ をすべて求めよ。
- (2) $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ とする。 $f(\omega) = \omega$ となる関数 $f(z)$ をすべて求めよ。
- (3) z が H の元 (要素) ならば、 $f(z)$ もまた H の元となることを示せ。 ($z \in H$ ならば $f(z) \in H$ となることを示せ。)
- (4) $f(z)$ の逆関数があればそれを求めよ。

問題 5 p, q は正の無理数で、 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ であるとき二つの集合

$$P = \{[p], [2p], [3p], \dots\},$$

$$Q = \{[q], [2q], [3q], \dots\}$$

について次の問に答えよ。但し、 $[x]$ は x をこえない最大の整数を表す。

(例 $[3.14] = 3$)

- (1) 特に、 $p = \sqrt{2}$ のとき、10 以下の整数の範囲で集合 P, Q の元 (要素) をそれぞれ書き出せ。(ただし、記号 $[]$ は用いない。) $\sqrt{2} = 1.41$ として計算してもよい。
- (2) $p > 1$ を示せ。
- (3) $m < n$ (m, n : 自然数) ならば、 $[mp] < [np]$ を証明せよ。
- (4) $P \cap Q = \emptyset$ を証明せよ。
- (5) 自然数 h が P の元 (要素) でないならば、 h は Q の元であることを証明せよ。
($h \notin P$ ならば $h \in Q$ となることを示せ。)($h \notin P$ は、 h は P に属さないことを示す。)

昭和63年度(昭和64年 1 月15日実施)

第 7 回

北海道高等学校数学コンテスト

解 答 と 解 説

北海道算数数学教育会高等学校部会

1

自然数の掛け算を、昔のロシアの農民は(イ)2で割ること(ただし余りは捨てる)(ロ)2倍すること(ハ)加えることの(イ)(ロ)(ハ)の組み合わせで下の例のように計算をしていた。

35×28=980の例

(イ)	35	28	(ロ)
	17	56	
(2で割る ただし余りは捨てる)	8	112	(ハ)
	4	224	(左の数が偶数のときは、右の数を消し、残りを加える)
	2	448	
	1	896	

980

(ハ)

$$35 \times 28 = 28 + 56 + 896 = 980$$

- (1) 45×28を上例の例にならって書き、答えを求めよ。
- (2) 78×30, 29×43についても、同様に計算せよ。
- (3) なぜ正答が得られるのか、上の例を使って説明せよ。

着眼点

2で割り切れるか余りが1かが、10進数を2進数に変換することに対応していることを発見すれば、説明は容易であるが、ちょっと気づきにくいと思う。

解答例

(1) 45 28 22—56 11 112 5 224 -2—448 1 896 ----- 1260	(2) 78—30 29 43 39 60 14—86 19 120 7 172 9 240 3 344 -4—480 1 688 -2—960 ----- 1 1920 1247 ----- 2340	$\therefore 29 \times 43 = 1247$
---	---	----------------------------------

$\therefore 45 \times 28 = 1260$

$$\therefore 78 \times 30 = 2340$$

- (3) 35×28=980の解答例で説明する。
- 35を2進法で表すと $100011 = 2^5 + 2^1 + 2^0$
- よって $35 \times 28 = (2^5 + 2^1 + 2^0) \times 28$
- $$= 2^5 \times 28 + 2^1 \times 28 + 2^0 \times 28$$
- $$= 896 + 56 + 28 = 980$$
- 上記については、下のようにも説明できる。

2	35.....1	35 28 = 2 ⁰ ×28
2	17.....1	17 56 = 2 ¹ ×28
2	8.....0	8 —112
2	4.....0	4 —224
2	2.....0	2 —448
1	1	1 896 = 2 ⁵ ×28
		980

以上の計算は、自然数の一般の掛け算についても成り立つ。

2

正方形ABCDがある。対角線AC, BDの交点をOとする。線分AOの中点をEとし、直線DEとABの交点をFとする。次の各問を証明せよ。{各問毎に必要な図は必ず書いておくこと free hand でよい。}

- (1) AF : FB = 1 : 2
- (2) ∠AFE = ∠BFO
- (3) DE = EF + FO

着眼点

座標幾何、三角関数、ベクトル、マトリックス、射影幾何、等で証明してもよいが、以下には初等幾何(中学既習の図形教材)だけのものについて書く。

問1 i) AF : FBを平行行線で他直線上に移す。

ii) 直線DFとBCの交点Gを求め△AED ∽ △CEGから。

iii) △AEDをO中心180°回転する。

問2 i) 問1の結果から△AFE ∽ △BFOを見出す。

ii) △AFEを移動しAをBに重ね、∠FAEを∠OBFに重ねる。

問3 i) △FBOをAB軸に折り返して△FBO'とし中点連結の定理を使う。[また多くの解法があるだろうが typical のものだけ挙げておく。]

解答例

Bを通過してFDに平行線をひきACとの交点をGとする。

$$\triangle OBG, \triangle ODE \text{ で } BO = DO$$

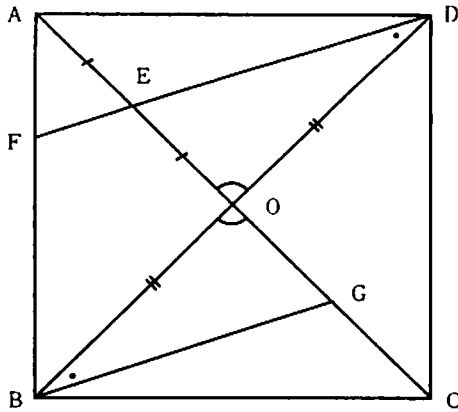
$$\angle EDO = \angle GBO, \angle EOD = \angle GOB$$

$$\therefore \triangle OBG \cong \triangle ODE \quad \therefore OG = OE = AE$$

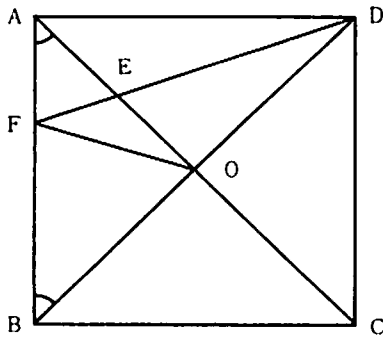
$\triangle ABG$ で $AF:FB=AE:EG=1:2$

(注) 方法としては着眼点 ii) が better.

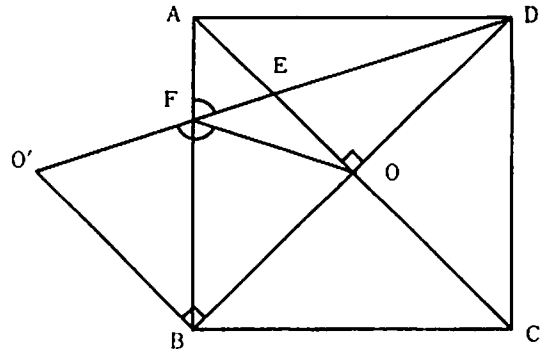
(注): でなく分数形にした方が書きやすい.



- 問2 $\triangle AFE, \triangle BFO$ で $AF:FB=1:2$
 $AE:BO=AE:AO=1:2$
 $\angle FAE=\angle FBO=45^\circ$
 $\therefore \triangle AFE \sim \triangle BFO$ i.e. $\angle AFE=\angle BFO$



- 問3 $\triangle FBO$ ををAB軸に折り返したものを $\triangle FBO'$ とする。
 $\angle BFO'=\angle BFO=\angle AFE$
 $\therefore O'$ は直線DF上にある。
 $\angle O'BO=2\angle FBO=90^\circ=\angle AOD$
 $\therefore EO \parallel O'B$
 $\triangle DO'B$ で $DE=EO'=EF+FO'=EF+FO$

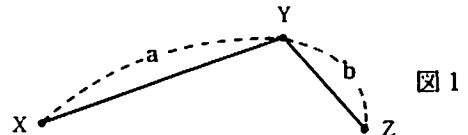


3

2つの線分を、自由に曲げることのできる関節でつなげた折れ線を、XYZとおく。線分XY, 線分YZの長さをそれぞれa, bとおく(図1)。次の間において、折れ線はある平面 α 内だけを動く。次の間に答えよ。

- (1) 折れ線XYZのXを、平面 α 内の定点Aに取り付けた。折れ線XYZは、XがAにくっついたまま平面 α 内を自由に動ける。a, bの値が次の(ア), (イ), (ウ)であるときの、折れ線の先端Zの到達範囲(領域)をそれぞれ図示せよ。

- (ア) $a=6, b=2$
(イ) $a=2, b=6$
(ウ) $a=4, b=4$



- (2) $a=10, b=2$ とする。折れ線XYZを平面 α 内の定点Aに取り付けたが、取り付け方が悪いため、線分XYは点Aを中心としたある 90° の範囲しか動けなかった(解答用紙の図の2つの半直線AS, ATの間の範囲)。このときの折れ線XYZの先端Zの到達範囲を図示し、この部分の面積を求めよ。ただし、関節Yにおいては自由に曲げられるものとする。
- (3) $a=10, b=2$ とする。平面 α 内に2点A, Bがあり、A, B間の距離は16である。XYZと同じ折れ線を2組用意して、それらを $X_1Y_1Z_1, X_2Y_2Z_2$ とおく。いま X_1 を点Aに取り付け、 X_2 を点Bに取り付ける。2つの折れ線は、取り付けられた点のまわりに平面 α 内を自由に動けるものとする。次に2つの折れ線の先端 Z_1 と Z_2 を関節でつなぐ。このとき Z_1

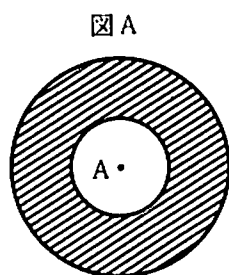
($= Z_2$)の到達範囲を図示せよ。ただし関節 $Y_1, Y_2, Z_1 (= Z_2)$ においては自由に曲げられるものとする。

着眼点

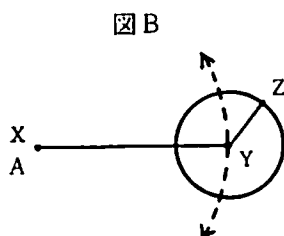
抽象的な幾何の問題ではなく、機械のメカニズムと関連をもつものとして出題した。この問題は直交座標を使って解く事も出来るだろうが、ここでのポイントは折れ線（クランク）の動きをじっくり考察することによってイメージを膨らませて行くことにある。折れ線の先端の到達範囲を図示してもらうだけでなく、その理由（証明）もかいてもらうことも検討したが今回は結果のみとした。というのは、この問題の解答の理由を文章で明確に述べるのは極めて困難であることと、理由の記述があいまいなものとなることが予想されるからである。口頭試問の形をとればよいのであるが。なお、このクランク機構の問題は、2次元トーラスや3次元トーラスを直感的に説明するために W.P. サーストン、J.R. ウィークス著「3次元多様体と宇宙の構造」（サイエンス1984年9月号）で用いられた方法にヒントを得た。

解答例

- (1) (ア)点Aを中心とする、半径8 ($= a + b$) と半径4 ($= a - b$) の2つの同心円の間の領域（境界を含む）である。(図A)

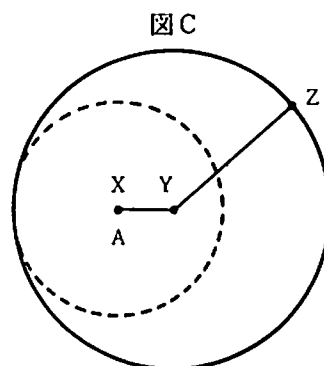


(理由) 線分XYを固定するとZの到達範囲は図Bのような円周となる。線分XYをAのまわりに1回転させれば答が得られる。

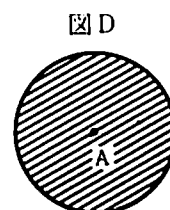


(イ)(ア)と全く同じ(図A)

(理由) 線分XYを固定すると、Zの到達範囲は図Cのような実線の円周となる。線分XYをAのまわりに1回転させれば実線の円は、図Cの点線の円（中心Aで半径4 $= b - a$ ）に接しながら動くので答が得られる。



- (ウ)点Aを中心とする半径8 ($= a + b$) の円の内部と境界全体である。(図D)

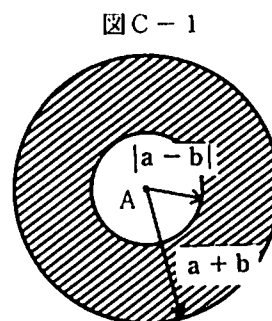


(理由) (ア)の理由とほとんど同じである。

一般のa, bについては、Zの到達範囲が次のようになる。

・ $a \neq b$ のとき

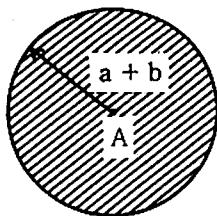
点Aを中心とする半径 $a + b$ と半径 $|a - b|$ の2つの同心円の間の領域（境界を含む）である。(図C-1)



・ $a = b$ のとき

点 A を中心とする半径 $a + b$ ($= 2a$) の円の内部と境界をあわせた領域である。(図 C-2)

図 C-2

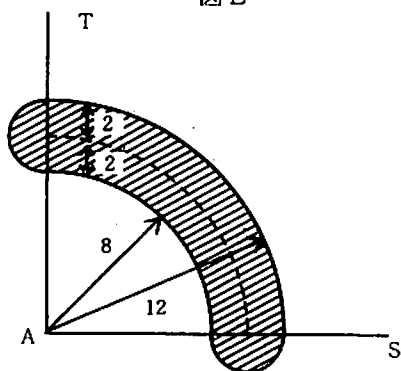


なお、(1)の別解としてベクトルの内積を用いる方法も、比較的楽にできる。直交座標を用いるのは繁雑であると思う。

- (2) 点 A を中心とする半径 12 ($= a + b$) と半径 8 ($= a - b$) の 2 つの同心円の間の部分の $\frac{1}{4}$ に、半径 2 の半円を「両端」につけ加えたもの (境界を含む) である。(図 E)

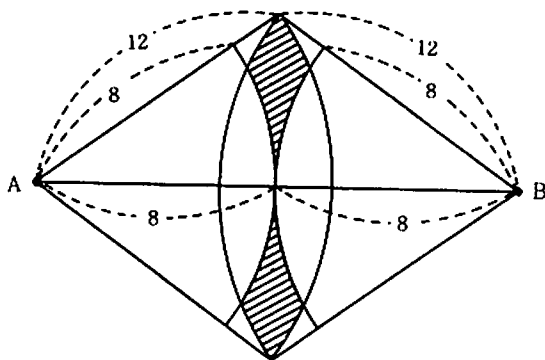
$$\text{面積} = \frac{1}{4} (\pi \times 12^2 - \pi \times 8^2) + 2 \times \frac{1}{2} \times \pi \times 2^2 = 24\pi$$

図 E



- (3) 点 A を中心とする半径 12 ($= a + b$), 半径 8 ($= a - b$) の同心円の間と B を中心とする同心円の間の重なった領域 (境界を含む) である。(図 F)

図 F



(理由) 点 A にとりつけられた折れ線 $X_1 Y_1 Z_1$ だけを考えると (1)(ア) でみたように、 Z_1 の到達範囲は点 A を中心とする同心円の間の領域である。同様に折れ線 $X_2 Y_2 Z_2$ を考えると Z_2 の到達範囲は点 B を中心とする同心円の間の領域である。 Z_1 と Z_2 がつながっているから 2 つの領域の重なった部分が答である。

証明は上記理由を精密にのべればよい。たとえば (1)(イ) の証明は次のようになる。

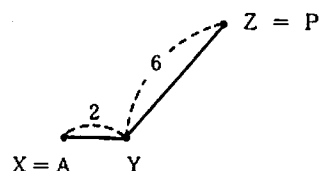
(1)(イ) の場合 Z の到達範囲全体を M , 同心円の間の部分を N とおく。

$$N = \{P \in \alpha \mid 4 \leq d(P, A) \leq 8\}$$

($d(P, A)$ は 2 点 P, A の間の距離をあらわす)

任意に $P \in M$ をとったとき、距離の三角不等式より

$$\begin{aligned} d(P, Y) + d(Y, A) &\geq d(P, A) \\ 6 + 2 &\geq d(P, A) \end{aligned}$$

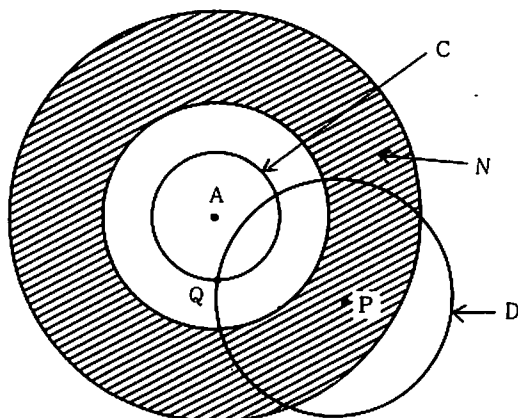


また $d(P, A) + d(A, Y) \geq d(P, Y)$
 $d(P, A) \geq d(P, Y) - d(A, Y) = 6 - 2$
 よって $P \in N$ が示された。

逆に任意に $P \in N$ をとったとき、 P に Z が到達するような折れ線の「配置」が存在することを示す。まず次の補題を確認しておこう。

補題 2 つの円 (半径 R, r で $R \geq r$) があり、2 つの円の中心の間の距離が d であるとき、この 2 つの円の円周が共通部分をもつ必要十分条件は $R - r \leq d \leq R + r$ である

図 G



点Aを中心とする半径2の円周をCとおく、 $P \in N$ であるから

$$4 \leq d(P, A) \leq 8 \dots\dots (*)$$

である。

ここで点Pを中心に半径6の円Dをかくと上記補題と(*)式より($R=6, r=2$)CとDとは共通部分をもつ。

$C \cap D$ に属する任意の1点をQとおく、このとき $d(A, Q)=2, d(Q, P)=6$ であるから、A, Q, Pの位置にそれぞれX, Y, Zがくるような折れ線の配置があり、PはZの到達範囲内である。よって $P \in M$ 。

以上をまとめると集合として $M=N$ が示された。

4

複素数の中で虚数部分が正であるものの全体を集合Hで表す。すなわち、 $H = \{z = x + yi \mid x, y \text{ は実数}, y > 0\}$ (ただし i は虚数単位で、 $i^2 = -1$ なるもの) である。

いま、Hを定義域とする関数 $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ (ただし a, b, c, d は整数で、 $ad-bc=1$) を考えよう。

- (1) $f(i)=i$ となる関数 $f(z)$ をすべて求めよ。
- (2) $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ とする。 $f(\omega)=\omega$ となる関数 $f(z)$ をすべて求めよ。
- (3) z がHの元(要素)ならば、 $f(z)$ もまたHの元となることを示せ。($z \in H$ ならば $f(z) \in H$ となることを示せ。)
- (4) $f(z)$ の逆関数があればそれを求めよ。

着眼点

複素数は数学I(1年生)の初めで学んだものだが、複素数を定義域とする関数(複素関数)は、大学の学部で学習するものである。しかし、 $f(z) = az + \beta$ (一次関数)や $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ (一次分数関数)などは、複素数の加減乗除(四則)で計算できるから、1年生にも扱える内容であろう。

(1)は、虚数単位 i を固定する関数を求める問題。 $"ad-bc=a^2+b^2=1"$ と " a, b が整数" とから解法。 a, b, c, d の組は全部で4組求まるが、関数は2組。

(2)も同様に、 $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ (1の虚立方根の一つ)を固定する関数を求める問題。 a, b, c, d の組

は全部で6組求まるが、関数は3組。

(3), (4)は要するに $f(z)$ がHからHへの1対1, 上への写像であることを示す問題である。(3)だけでは中への写像のみしか言えないが、(4)の中で上へ写像かつ1対1を示す必要がある。

1対1とは、" $z_1 \neq z_2 \Rightarrow f(z_1) \neq f(z_2)$ ", 上への写像とは " $w \in H \Rightarrow f(z)=w$ となる $z \in H$ が存在する" このことが示されて初めて、逆関数 $f^{-1}(w)=z$ となるものが定まる。

一次分数関数 $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ ($ad-bc \neq 0$) と行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ は深い関係がある。この関係を $f \mapsto A$ で表そう。別な一次分数関数 g が $g \mapsto B$ ならば、合成関数 $g \circ f \mapsto BA$ となり、 $f^{-1} \mapsto A^{-1}$ なる関係がある。複素関数論の話ではあるが、問題中の一次分数関数は、整数論や保型関数の分野に大いに利用されている。

解答例

- (1) $\frac{ai+b}{ci+d} = i$ より $ai+b = i(ci+d) = -c+di$, a, b, c, d は実数(整数)だから、 $a=d, b=-c, ad-bc=1$ より $a^2+b^2=1$ よって、 $(a, b) = (\pm 1, 0), (0, \pm 1)$ 故に、 $(a, b, c, d) = (\pm 1, 0, 0, \pm 1), (0, \pm 1, \mp 1, 0)$ (複号同順)。故に、前者の場合 $f(z)=z$, 後者の場合 $f(z) = -\frac{1}{z}$ 。
- (2) $\frac{a\omega+b}{c\omega+d} = \omega$ より $a\omega+b = c\omega^2+d\omega$, $a \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) + b = c \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) + d \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)$, $\left(b - \frac{a}{2} \right) + \frac{\sqrt{3}}{2}ai = -\frac{1}{2}(c+d) + \frac{\sqrt{3}}{2}(d-c)i$.
 $\therefore b - \frac{a}{2} = -\frac{1}{2}(c+d), a = d - c$. 故に、 $c = -b$, $d = a - b$. $ad - bc = a(a-b) + b^2 = a^2 - ab + b^2 = \left(a - \frac{b}{2} \right)^2 + \frac{3}{4}b^2 = 1$. よって、 $(a, b) = (\pm 1, 0), (0, \pm 1), (\pm 1, \pm 1)$. 故に、 $(a, b, c, d) = (\pm 1, 0, 0, \pm 1), (0, \pm 1, \mp 1, \mp 1), (\pm 1, \pm 1, \mp 1, 0)$. (複号同順)。第1の場合 $f(z)=z$, 第2の場合 $f(z) = -\frac{1}{z+1}$, 第3の場合 $f(z) = -\frac{z+1}{z}$ 。

(3) $z = x + yi (y > 0)$ に対して、 $f(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a(x+yi)+b}{c(x+yi)+d} = \frac{(ax+b)+ayi}{(cx+d)+cyi} = \frac{\{(ax+b)+ayi\} \{(cx+d)-cyi\}}{(cx+d)^2 + (cy)^2}$ 分母は、(i) $c \neq 0$ なら $cy \neq 0$ より分母 > 0 . (ii) $c = 0$ なら、 $ad -$

$bc=ad=1$ より $d \neq 0$ 。分母 $=d^2 > 0$ 。分子 $=(ax+b)(cx+d)+acy^2+(ad-bc)yi=(ax+b)(cx+d)+acy^2+yi$ 。 $y > 0$ より $f(z)$ の虚数部分 $\frac{y}{(cx+d)^2+(cy)^2}$ は正より、 $f(z)$ は H の元となる。

(4) $f(z)$ の値域を V とする。(3)より V は H に含まれる ($V \subseteq H$)。勿論、 V は空集合ではない。($\because f(i) \in H$) いま、 V の任意の元 w に対して、 $f(z)=w$ となる $z \in H$ が存在するが、 $\frac{az+b}{cz+d}=w$ より $az+b=czw+dw$ 。 $(-cw+a)z=dw-b$ 。 $(a, c) \neq (0, 0)$

で $w \in H$ だから、 $-cw+a \neq 0$ 。故に、 $z=\frac{dw-b}{-cw+a}$ 、すなわち、 $f(z)=w$ となる z は唯一つ定まり、 $d \cdot a - (-b) \cdot (-c) = ad - bc = 1$ より (3) と同様に、 $z \in H$ となる。いま、 $g(z)=\frac{dz-b}{-cz+a}$ とおくと、 $g(f(z))=z$ 。— ①。関数 $g(z)$ に対して同様に考えると、 $f(g(z))=z$ — ②。①より $z_1 \neq z_2 \Rightarrow g(f(z_1)) \neq g(f(z_2)) \Rightarrow f(z_1) \neq f(z_2)$ 、よって、 $f(z)$ は 1 対 1。②より $f(z)$ は H の上への関数となる。よって、逆関数は、 $g(z)$ となる。

5

p, q は正の無理数で、 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ であるとき二つの集合 $P = \{[p], [2p], [3p], \dots\}$ 、 $Q = \{[q], [2q], [3q], \dots\}$ について次の間に答えよ。但し、 $[x]$ は x をこえない最大の整数を表す。(例 $[3.14] = 3$)

- (1) 特に、 $p=2$ のとき、10以下の整数の範囲で集合 P, Q をの元(要素)をそれぞれ書き出せ。(ただし、記号 $[]$ は用いない。) $\sqrt{2} = 1.41$ として計算してもよい。
- (2) $p > 1$ を示せ。
- (3) $m < n$ (m, n : 自然数) ならば、 $[mp] < [np]$ を証明せよ。
- (4) $P \cap Q = \emptyset$ を証明せよ。
- (5) 自然数 h が P の元(要素)でないならば、 h は Q の元であることを証明せよ。($h \in P$ ならば $h \in Q$ となることを示せ。) ($h \in P$ は、 h は P に属さないことを示す。)

着眼点

どの間も $[]$ の記号の処理の仕方と、 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ の使い方が問題であろう。 $[]$ はガウス記号とよばれている。

- (1) 問題を理解し、 $[]$ の意味が分かれば得点できる問題だと思う。
- (2) $p > 1$ を示すことは簡単なことだが、この問題があることによって(3)がかなり考えやすくなっている。
- (3) n, m が自然数であることから $m < m+1 \leq n$ の関係と、 $p > 1$ を利用する。
- (4) 背理法を用いる。
 $[]$ の記号のはずしかた、すなわち $[x] = k$ なら $k \leq x < k+1$
- (5) $h \in P$ の条件をどのように式で表せるかが大きなポイントであろう。解答例で言えば、「 $[(m-1)p] < h < [mp]$ となる自然数 m が存在し、このとき $(m-1)p < h < mp-1$ となる」 $h \in Q$ を示すためには、 $h < tq < h+1$ (t : 自然数) を示すことを考えればよい。

解答例

- (1) $P = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 9\}$
 $Q = \{3, 6, 10\}$
- (2) $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ を変形して、 $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} = \frac{p-1}{p}$
 $q > 0$ より、 $\frac{p-1}{p} > 0$
 $p > 0$ だから、 $p-1 > 0$
よって、 $p > 1$
- (3) $mp < mp+1 < mp+p = (m+1)p \leq np$
ゆえに、 $[mp] < [mp+1] \leq [np]$
よって、 $m < n$ なら $[mp] < [np]$
- (4) $P \cap Q \neq \emptyset$ と仮定する。
即ち、 $P \cap Q$ に属する自然数 k が存在する。
このとき $[mp] = k = [nq]$ を満たす自然数 m, n が存在する。
ゆえに、 $k < mp < k+1$ 、 $k < nq < k+1$ (p, q は無理数なので等号はない)
変形して、 $\frac{m}{k+1} < \frac{1}{p} < \frac{m}{k}$ 、 $\frac{n}{k+1} < \frac{1}{q} < \frac{n}{k}$
辺々加えて、 $\frac{m+n}{k+1} < \frac{1}{p} + \frac{1}{q} < \frac{m+n}{k}$
 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ より、 $\frac{m+n}{k+1} < 1 < \frac{m+n}{k}$
ゆえに、 $k < m+n < k+1$ となるが、 k, m, n が

自然数であることに不合理。よって、 $P \cap Q = \emptyset$

(5) (3) より、 $m < n$ のとき $[mp] < [np]$ なので、
 $[(m-1)p] < h < [mp]$ となる自然数 m が存在する。

ゆえに、 $(m-1)p < h < mp-1$

変形して、 $\frac{m-1}{h} < \frac{1}{p} < \frac{m}{h+1}$

$\frac{1}{p} = 1 - \frac{1}{q}$ より、 $\frac{m-1}{h} < 1 - \frac{1}{q} < \frac{m}{h+1}$

ゆえに、 $\frac{h-m+1}{h} > \frac{1}{q} > \frac{h-m+1}{h+1}$

変形して、 $h < (h-m+1)q < h+1$

よって、 $h = [(h-m+1)q] \in Q$ となる。

第 7 回

北海道高等学校数学コンテスト

採点を終えて

平成元年 1 月 15 日(日)実施

北海道算数数学教育会高等学校部会

第7回「数学コンテスト」を終えて

北数教高校部会長 黒 澤 耕 生

この「数学コンテスト」は、数学への興味や関心を深め、同時に、数学を勉強する本来の意義である基本的な概念や原理・法則などの理解の深化、論理的な思考力の養成、創造的な考え方や処理の仕方の開発などを目的とし、あわせて、生徒の皆さんの潜在する素質や能力の発掘と向上を図ることをねらいとして行われ、今年は7回目になります。

7年にわたる関係各位の援助や協力と参加する高校生諸君の意欲によって、回を重ねるごとにその評価が高まり、すっかり定着した感じがします。今年は、全道から27校223名の参加により無事実施することができ、当日主会場である札幌平岸高校では、問題に取り組む生徒諸君の真剣で意欲的な姿に接し、大いにたのもしさを感じた次第です。

このコンテストの趣旨やねらいを受けて、今回秀れた成績をおさめた人は大いに自信をもってさらに精進してほしい、皆さん学校に帰って数学を愛する同級の人たちをふやしお互い励まし合いながら勉強してほしいと考えます。どうか、来年も多くの人が参加して下さい。

終りになりましたが、北海道教育委員会、札幌市教育委員会、高等学校長協会より賜りました御後援、及び、北海道新聞社、福武書店の物心にわたっての御援助に深く感謝申し上げますとともに、本年も変わらず、出題や採点から運営全般について御尽力頂きました大学や北数教高校部会研究部を中心とする諸先生に厚く御礼申しあげる次第です。

●成績優秀者

森 卓 也	金 谷 有 剛	梅 田 義 章	中 西 竜太郎
橋 本 徹	伊 山 修	田 中 拓 史	加 藤 公 一
大 島 環	武 藤 智 夫	尾 形 昭 史	山 内 由紀朗
藤 井 裕	高 橋 知 宏	大 関 一 誠	吉 井 彰 規
近 藤 哲 史	堀 川 卓 郎	岡 田 都 子	野 谷 盛 仁

第 7 回 北海道高等学校数学コンテスト

度 数 分 布 表

階 級	問 1	問 2	問 3	問 4	問 5
40 — 40	44	44	18		
36 — 39	2	36	8	1	
32 — 35	15	33	62	5	
28 — 31	7	30	22	3	
24 — 27	9	10	44	8	1
20 — 23	6	14	20	10	13
16 — 19	1	14	13	9	10
12 — 15	124	6	11	24	34
8 — 11	11	8	5	35	38
4 — 7	2	12	5	37	44
0 — 3	2	16	15	91	83
合 計 点	4,912	6,155	5,726	1,785	1,507
受 験 数	223	223	223	223	223
平 均 点	22.0	27.6	25.7	8.0	6.8
S : D	11.0	12.3	10.6	8.8	6.9

階 級	合 計
180 — 199	
160 — 179	5
140 — 159	12
120 — 139	33
100 — 119	36
80 — 99	48
60 — 79	46
40 — 59	28
20 — 39	8
0 — 19	6
— - 1	
19,983	
222	
90.01	
34.24	

1

自然数の掛け算を、昔のロシアの農民は(イ)2で割ること(ただし余りは捨てる)(ロ)2倍すること(ハ)加えることの(イ)(ロ)(ハ)の組み合わせで下の例のように計算をしていた。

35×28=980の例

(イ)	35	28	(ロ)
	17	56	(2倍する)
(2で割る)	8	112	(ハ)
(ただし余りは捨てる)	4	224	(左の数が偶数のときは、右の数を消去し、残りを加える)
	2	448	
	1	896	
	980		

$$35 \times 28 = 28 + 56 + 896 = 980$$

- (1) 45×28を上例にならって書き、答えを求めよ。
 (2) 78×30, 29×43についても、同様に計算せよ。
 (3) なぜ正答が得られるのか、上の例を使って説明せよ。

講評

配点は、(1)(2)で15点(3)25点とした。

(1)(2)については、問題例にならって計算をすれば正答が得られることより、ほとんどの者が正解であった。この問題のねらいは(3)であり、厳密な証明を要求するものではないが、例を使い、簡明で誰にでも納得のできる説明を求めるものである。したがって、説明は、一般の場合についても、成り立つことを念頭におかなければならない。(3)の満点の者は、少なからずいたが、同じ満点でも、解答の優劣の差異がおおきかった。

正解者の多くは、 $35 \times 28 = 28 + 56 + 896 =$

$28(1 + 2 + 32) = 28(2^0 + 2^1 + 2^5)$ に気が付いた者であった。同じことを、言葉で説明した者も正解としたが、すっきりとした解答は少なかった。問題が比較的平易で、とっつき易かったせいもあり、多数の者が高得点を得たのは、大変好ましいことである。願わくば、この例の掛け算が、有用か否かは別にして、私達の身の回りにある計算法にも、工夫によって簡便になったり、ある特殊な条件のもとに、簡単に正答が得られる場合がある。ひまなとき、このような工夫を自分で考えたり、独自の計算法を創り出すことは、他人の問題を解くことよりも、何倍も有意義なことだと思う。

解答例

(1)	45	28	(2)	78	30	29	43
	22	56		39	60	14	86
	11	112		19	120	7	172
	5	224		9	240	3	344
	2	448		4	480	1	688
	1	896		2	960		1247
	1260			1	1920		2340

$$\therefore 45 \times 28 = 1260$$

$$\therefore 78 \times 30 = 2340$$

- (3) 35×28=980の解答例で説明する。

35を2進法で表すと $100011 = 2^5 + 2^1 + 2^0$

よって $35 \times 28 = (2^5 + 2^1 + 2^0) \times 28$

$$= 2^5 \times 28 + 2^1 \times 28 + 2^0 \times 28$$

$$= 896 + 56 + 28 = 980$$

上記については、下のようにも説明できる。

2	35	1	35	28 = 2^0 × 28
2	17	1	17	56 = 2^1 × 28
2	8	0	8	112
2	4	0	4	224
2	2	0	2	448
	1		1	896 = 2^5 × 28
				980

以上の計算は、自然数の一般の掛け算についても成り立つ。

2

正方形 ABCD がある。対角線 AC, BD の交点を O とする。線分 AO の中点を E とし、直線 DE と AB の交点を F とする。次の各問を証明せよ。(各問毎に必要な図は必ず書いておくこと、free hand でよい。)

- (1) AF : FB = 1 : 2
 (2) ∠AFE = ∠BFO
 (3) DE = EF + FO

I. 配点

- (1) 図 3 点, 説明 12 点
 (2) 図 3 点, 説明 12 点
 (3) 図 2 点, 説明 8 点
 総計 40 点満点

II. 初等幾何の出題について

このコンテスト実施の始めの会議の席上で筆者は現在高校教材中になく初等幾何の出題を主張し当時の係員全員の賛成を得た。以来毎回全出題に対する

二割の重みで続けて来た。折も折 5 年後に高校教材として初等平面幾何が導入される事が定まった。それだけ無視できない数学教育上としての重要性が存在するのである。初等幾何の教材としての重要性は図形間の関係認識にあり、計算は第二次的のものである。計算としては三角関数や座標幾何、ベクトル、マトリクスと数多くある。コンテストに必らず初等幾何を出題するのは数学教育上の本質的な発想に依るものであり、今後も続けられるであろう、というよりはもっとと有意義になろう。但し受験生の解答に対してはどんな方法でも公平に採点している。

III. 図を書くことについて

free hand を認め、特に粗末でない限り各問配点の二割を今回は与えた。このことは初等幾何採点の基本方針として実行してきた。生徒は「文章の意味に合致する図を書くこと」に不得手である。それは「文章の意味を正確に把握する能力に欠けている」、「文章の意味を適確に図表現する訓練が不足である」の二つの原因の為に判断する。だから仮りに式表示や文章が無くても図だけで二割を与えているのである。このコンテストに参加した生徒が今後の学習で積極的に図を書く要因になってくれたらの配慮による。

特に此度は各問毎に必要な図を書くことを命じておいたので図の無い解答はきびしく減点した。

ここで逆に注意すべきことは「図に示しておけば説明の必要がない」と誤解している生徒が居ることである。Text や参考書に「図のように」、「図によって」などの用語がある為の害であろうが「問題文や与えられた図に示されていない点や線などの名称は必ず説明すること。この原則は厳守されなければならない。

IV. 証明の方法について

出題者としては(1)(2)は問題文にある通りの図を書けば、それ以上に何の追加も不用であり共に二つの三角形の相似で証明され(3)は少し図形移動か補助線が必要かと思っていたのだが、予想に反して生徒の証明は多種多様であったので驚いたが、それにもまして生徒の旺盛な思考力に感心させられた。教師として一つの方法を押しつけてはいけないことは肝に銘じて居り、であるが故に穴埋め式のテストには反対意見であるのだがかくまでに多様とは考えていなかった。ここに色々のサンプルは示す余白がないので割愛する。

V. 注意すべき事柄

1. 相似や合同の式表示

「 $\triangle AFE$ と $\triangle CDE$ は相似である。」
 のような例 $\triangle AFE$ の $\triangle CDE$ とすべきものを「…相似である。」では対応が明確でない。また考え違いがあっても表面には明らかでない。その証拠としてのを
 使った生徒の中に対応が Loose である者が多かった。

これは合同についても同様であり減点の対象とした。

2. 相似比と面積比の混同

$\triangle AFE \sim \triangle CDE$

$AE : EC = 1 : 3$ のとき

これを $\triangle AFE : \triangle CDE = 1 : 3$ とする生徒が多く居た。面積比と相似比の区別を明確にすべきであるが、一方底辺共有のときは

$\triangle AOF : \triangle FOB = 1 : 2$ とできる。

これらの区別を正確に把握し表現できるようにすることは今後必要である。

3. 正方形 ABCD の頂点の位置

通常は A を定めたなら B はその下方 C は B の右方、D は A の右方とするがその逆 B を A の右、C は B の下、D は A の下とする例があった。これは強制すべきことでは無いが、実は点の順序が正の回転と負の回転と二つあって前者は正の回転である。これを Loose にすれば将来「向き」のついた図形について学習するときの妨げとなろう。

4. = についての誤解

$\triangle AFE = \triangle EFC$ は二つの三角形の等積を示す式である。 $\triangle AFE$ は「頂点が 3 つの A, F, E である。」ことを示すことと、その面積も同時に表わしていることを知らない生徒が居る。

5. ベクトル計算の誤解

$$\vec{DE} = \frac{3}{4} \vec{a} + \vec{b} \text{ から } |\vec{DE}| = \frac{3|\vec{a}| + |\vec{b}|}{4}$$

などの計算をする生徒が居た。これは十分に注意してほしい所である。

VI. 総括

色々書いて来たが、中学で習った図形問題に対して数学に自信のある生徒とはいえ、中学を離れ 9 か月にもなるのに、これだけ解答したことについて、諸君と共に諸君に指導した中学校の先生方に深く敬意を表する。また二年生は新しく習った座標幾何、三角比、ベクトルなどで試み、それは極めて不利であるのに最後まで計算を完了した者も居り、採点者としては苦しかったが、それらの気迫を尊重する。出来たらこの問題についての解答種別など分析して表彰式までにはレポートを作り度いと思っている

が、間に合わないときは筆者が主宰している「幾何問題研究会」の会報に特別発表したいと思っている。

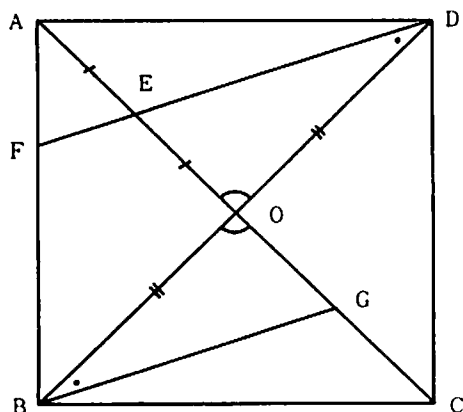
解答例

B を通って FD に平行線をひき AC との交点を G とする。

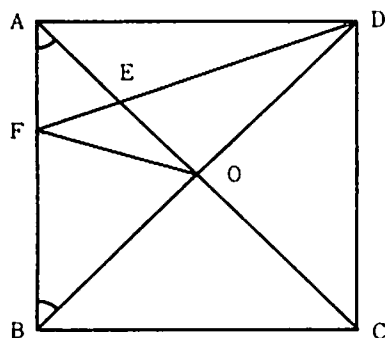
$\triangle OBG, \triangle ODE$ で $BO = DO$
 $\angle EDO = \angle GBO, \angle EOD = \angle GOB$
 $\therefore \triangle OBG \cong \triangle ODE \quad \therefore OG = OE = AE$
 $\triangle ABG$ で $AF : FB = AE : EG = 1 : 2$

(注) 方法としては着眼点 ii) が better.

(注) : でなく分数形にした方が書きやすい。

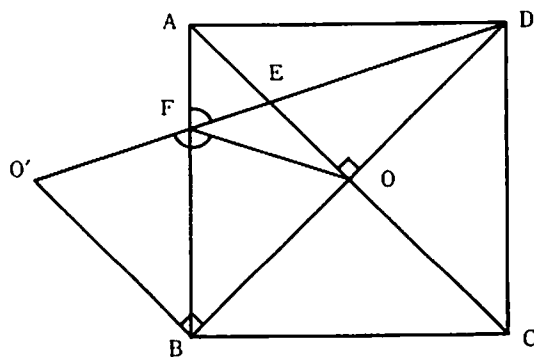


問2 $\triangle AFE, \triangle BFO$ で $AF : FB = 1 : 2$
 $AE : BO = AE : AO = 1 : 2$
 $\angle FAE = \angle FBO = 45^\circ$
 $\therefore \triangle AFE \sim \triangle BFO$ i.e. $\angle AFE = \angle BFO$



問3 $\triangle FBO$ をを AB 軸に折り返したものを $\triangle FBO'$ とする。

$\angle BFO' = \angle BFO = \angle AFE$
 $\therefore O'$ は直線 DF 上にある。
 $\angle O'BO = 2\angle FBO = 90^\circ = \angle AOD$
 $\therefore EO \parallel O'B$
 $\triangle DO'B$ で $DE = EO' = EF + FO' = EF + FO$



3

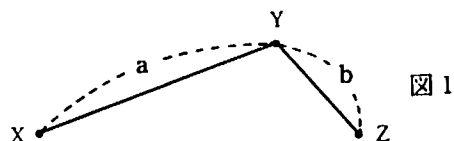
2つの線分を、自由に曲げることのできる関節でつなげた折れ線を、XYZとおく。線分XY, 線分YZの長さをそれぞれa, bとおく(図1)。次の間において、折れ線はある平面 α 内だけを動く。次の間に答えよ。

(1) 折れ線XYZのXを、平面 α 内の定点Aに取り付けた。折れ線XYZは、XがAにくっついたまま平面 α 内を自由に動ける。a, bの値が次の(ア), (イ), (ウ)であるときの、折れ線の先端Zの到達範囲(領域)をそれぞれ図示せよ。

(ア) $a = 6, b = 2$

(イ) $a = 2, b = 6$

(ウ) $a = 4, b = 4$



(2) $a = 10, b = 2$ とする。折れ線XYZを平面 α 内の定点Aに取り付けたが、取り付け方が悪いので、線分XYは点Aを中心としたある 90° の範囲しか動けなかった(解答用紙の図の2つの半直線AS, ATの間の範囲)。このときの折れ線XYZの先端Zの到達範囲を図示し、この部分の面積を求めよ。ただし、関節Yにおいては自由に曲げられるものとする。

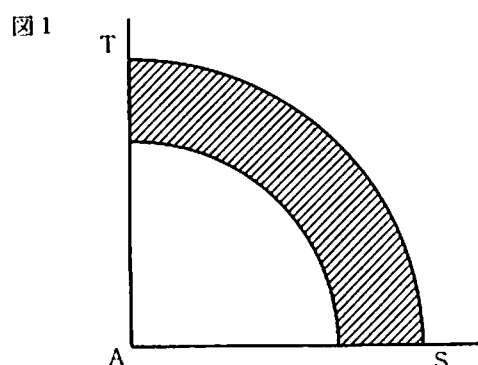
(3) $a = 10, b = 2$ とする。平面 α 内に2点A, Bがあり、A, B間の距離は16である。XYZと同じ折れ線を2組用意して、それらを $X_1Y_1Z_1, X_2Y_2Z_2$ とおく。いま X_1 を点Aに取り付け、 X_2 を点Bに取り付ける。2つの折れ線は、取り付けられた点のまわりに平面 α 内を自由に動けるものとする。次に2つの折れ線の先端 Z_1 と Z_2 を関節でつなぐ。このとき $Z_1 (= Z_2)$ の到達範囲を図示せよ。ただし関節 Y_1, Y_2, Z_1

($= Z_2$)においては自由に曲げられるものとする。

講 評

題意を正確に把握すれば、折れ線の動き方を図で確認しながら解いていくことができる。イメージを正しくつくるのがポイントである。

- (1) (ア)と(カ)は出題者の予想どおり正答率が高く（それぞれ83%、85%）、(イ)は他に比べて正答率が49%と低かった。(イ)をどう考えて、正しく領域をだすかが、第3問の2つのヤマのうちのひとつである。
- (2) は出題者の予想より出来がよくなかった。到達範囲の図示の正答率は55%で、図1のような誤答が30%あった。線分XYが90°の範囲にあるという問題文から点Zもその範囲にあるという思いこみか、うっかりミスによる誤答が多かったと考えられる。正しく得られた到達範囲の面積は比較的よくできていた(受験者全体に対する正答率が43%)が、 π を3.14として計算している者もいた。 π は π のまま使えばよく、面積の近似値が必要ときだ



け3.14等を使えばよいのである。なお、受験番号128の受験者から(2)の問題文の不備を指摘された。問題文(2)の2つめの文の出だしを「折れ線XYZの点Xを平面 α 内の」とすべきであった。陳謝するとともに、今後十分気をつける。

- (3) は第3問の2つのヤマのもうひとつである。2組の折れ線をつなげない状態で、 Z_1 、 Z_2 の到達範囲を考え、 Z_1 、 Z_2 をつなぐことが2つの領域の重なる部分であることに気づくかどうか为正答、誤答の分かれめである。正答率は28%であった。

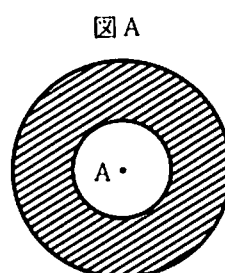
全体として、答のかき方の不備がめだった。領域の境界線がどんな線であるのか（直線の一部か、円の一部か、円ならば中心や半径は何か）、結局どの部分が答の領域であるのか（斜線をひいた部分なのか）が採点者に明確につたわらない解答があった。自分

の考えを他の人にわかるように解答用紙で表現する力をつけられたい。

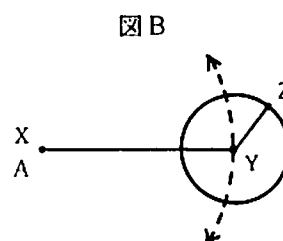
最後に、この問題を発展させて、3本の線分をくっつけた折れ線で到達範囲を考えたり、パソコンのグラフィックスで、Zの到達領域をディスプレイで確認したりすることをおすすめする。この問題に限らず「軌跡」や「領域」の分野の問題についても、計算や証明等で考えることと、グラフィックスをかいてみることの両方をやることによって、誰も気づかなかった新しいことを発見するかもしれない。諸君がそのような発見で皆を驚かせてくれることを期待する。

解答例

- (1) (ア)点Aを中心とする、半径8 ($= a + b$)と半径4 ($= a - b$)の2つの同心円の間の領域（境界を含む）である。(図A)

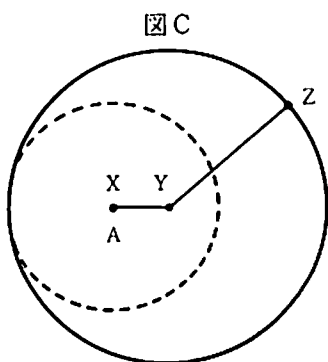


(理由) 線分XYを固定するとZの到達範囲は図Bのような円周となる。線分XYをAのまわりに1回転させれば答が得られる。

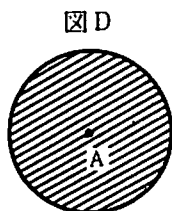


- (イ)ア)と全く同じ(図A)

(理由) 線分XYを固定すると、Zの到達範囲は図Cのような実線の円周となる。線分XYをAのまわりに1回転させれば実線の円は、図Cの点線の円（中心Aで半径 $4 = b - a$ ）に接しながら動くので答が得られる。



(ウ)点Aを中心とする半径8 ($= a + b$) の円の内部と境界全体である。(図D)



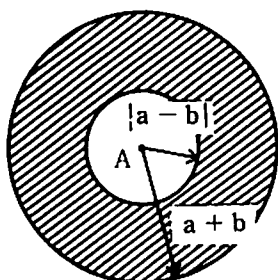
(理由) (ア)の理由とほとんど同じである。

一般の a, b については, Z の到達範囲が次のようになる。

・ $a \neq b$ のとき

点Aを中心とする半径 $a + b$ と半径 $|a - b|$ の2つの同心円の間の領域 (境界を含む) である。(図C-1)

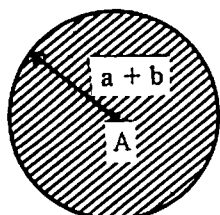
図C-1



・ $a = b$ のとき

点Aを中心とする半径 $a + b (= 2a)$ の円の内部と境界をあわせた領域である。(図C-2)

図C-2

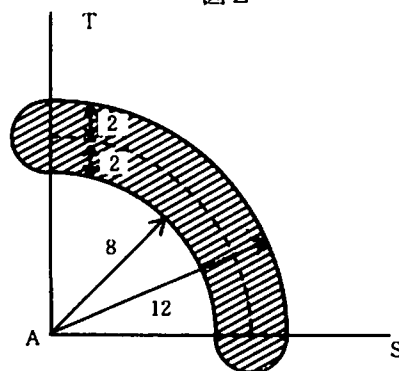


なお, (1)の別解としてベクトルの内積を用いる方法も, 比較的楽にできる。直交座標を用いるのは繁雑であると思う。

(2) 点Aを中心とする半径12 ($= a + b$) と半径8 ($= a - b$) の2つの同心円の間の部分の $\frac{1}{4}$ に, 半径2の半円を「両端」につけ加えたもの (境界を含む) である。(図E)

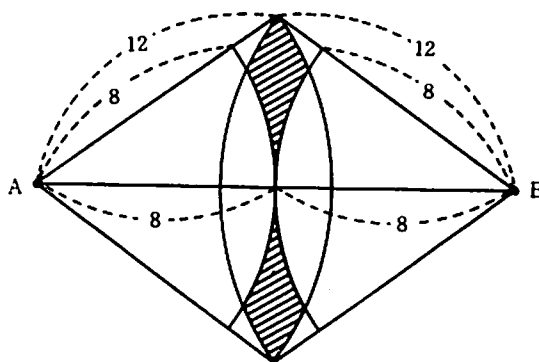
$$\text{面積} = \frac{1}{4} (\pi \times 12^2 - \pi \times 8^2) + 2 \times \frac{1}{2} \times \pi \times 2^2 = 24\pi$$

図E



(3) 点Aを中心とする半径12 ($= a + b$), 半径8 ($= a - b$) の同心円の間とBを中心とする同心円の間との重なった領域 (境界を含む) である。(図F)

図F



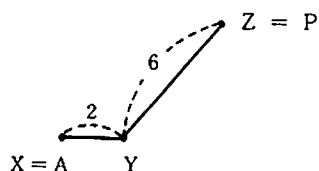
(理由) 点Aにとりつけられた折れ線 $X_1 Y_1 Z_1$ だけを考えると(1)(ア)でみたように, Z_1 の到達範囲は点Aを中心とする同心円の間の領域である。同様に折れ線 $X_2 Y_2 Z_2$ を考えると Z_2 の到達範囲は点Bを中心とする同心円の間の領域である。 Z_1 と Z_2 がつながっているから2つの領域の重なった部分が答である。

証明は上記理由を精密にのべればよい。たとえば(1)(イ)の証明は次のようになる。

(1)(イ)の場合 Z の到達範囲全体をM, 同心円の間の部分をNとおく。

$N = \{P \in \alpha \mid 4 \leq d(P, A) \leq 8\}$
 $(d(P, A) \text{ は } 2 \text{ 点 } P, A \text{ の間の距離をあらわす})$
 任意に $P \in M$ をとったとき、距離の三角不等式より

$$d(P, Y) + d(Y, A) \geq d(P, A) \\ 6 + 2 \geq d(P, A)$$

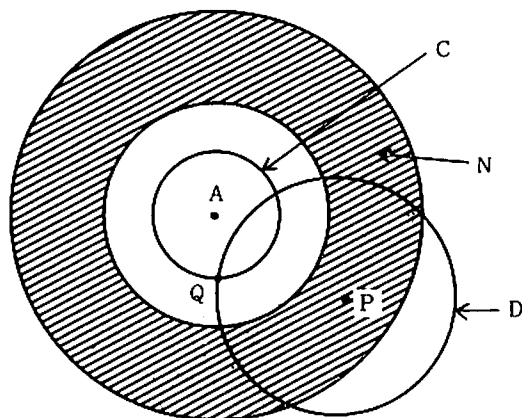


また $d(P, A) + d(A, Y) \geq d(P, Y)$
 $d(P, A) \geq d(P, Y) - d(A, Y) = 6 - 2$
 よって $P \in N$ が示された。

逆に任意に $P \in N$ をとったとき、 P に Z が到達するような折れ線の「配置」が存在することを示す。
 まず次の補題を確認しておこう。

補題 2つの円(半径 R, r で $R \geq r$)があり、2つの円の中心の間の距離が d であるとき、この2つの円の円周が共通部分をもつ必要十分条件は $R - r \leq d \leq R + r$ である

図 G



点 A を中心とする半径2の円周を C とおく、 $P \in N$ であるから

$$4 \leq d(P, A) \leq 8 \dots\dots (*)$$

である。

ここで点 P を中心に半径6の円 D をかくと上記補題と $(*)$ 式より($R=6, r=2$) C と D とは共通部分をもつ。

$C \cap D$ に属する任意の1点を Q とおく、このとき $d(A, Q)=2, d(Q, P)=6$ であるから、 A, Q, P の位置にそれぞれ X, Y, Z がくるような折れ線の配置があり、 P は Z の到達範囲内である。よって $P \in M$ 。

以上をまとめると集合として $M=N$ が示された。

4

複素数の中で虚数部分が正であるものの全体を集合 H で表す。すなわち、 $H = \{z = x + yi \mid x, y \text{ は実数}, y > 0\}$ (ただし i は虚数単位で、 $i^2 = -1$ なるもの)である。

いま、 H を定義域とする関数 $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$

(ただし a, b, c, d は整数で、 $ad - bc = 1$)を考えよう。

- (1) $f(i) = i$ となる関数 $f(z)$ をすべて求めよ。
- (2) $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ とする。 $f(\omega) = \omega$ となる関数 $f(z)$ をすべて求めよ。
- (3) z が H の元(要素)ならば、 $f(z)$ もまた H の元となることを示せ。 $(z \in H \text{ ならば } f(z) \in H \text{ となることを示せ})$ 。
- (4) $f(z)$ の逆関数があればそれを求めよ。

講評

(1) $\frac{ai+b}{ci+d} = i$ の式はすぐ立てれるが、分母を払って解いた人が少ないのには驚きました。また、 $a=d, b=-c$ は出ているが、条件を使わず $f(z) = \frac{az+b}{-bz+a}$ で終わっている人も多く見受けられました。

(2) (1)と同様に計算すればよいのですが、複素数の四則計算が十分でないようです。また、 $a\omega^2 + b\omega + c = 0$ から直ちに、 $a=b=c=0$ と解いた人が多かったようです。

(3) 素直に、 $z = x + yi (y > 0)$ を代入して $f(z)$ の虚数部分を調べるとよい。間違いの例としては、分母 $(cx+d) + cyi$ の実数化で、 $(cx+d)^2 - c^2y^2$ としたもの、 $\frac{*}{(cx+d) + cyi} = \frac{*}{cx+d} + \frac{*}{cyi}$ と分けてしまったものなどが目についた。

(4) 簡単な計算で、 $f^{-1}(z) = \frac{dz+b}{-dz+a}$ は出てきま

すが、 $f(z)$ の逆関数になるのかどうか、定義域・値域はどうかなどチェックする姿勢が欲しい。

ユニークな答案が、函館中部の小沢君、(4)は5点でしたが、きちんとした答案は札南の橋本君、札北の伊山君、小樽潮陵の近藤君たちは特に目を引きました。

解答例

(1) $f(i) = \frac{ai+b}{ci+d} = i$, 分母を払って, $ai+b = -c+di$. a, b, c, d は実数だから, $b=-c, a=d$. $ad-bc=1$ に代入して, $a^2+b^2=1$. a, b はともに整数だから, $(a, b) = (\pm 1, 0), (0, \pm 1)$. 故に, $(a, b, c, d) = (\pm 1, 0, 0, \pm 1), (0, \pm 1, \pm 1, 0)$ (複号同順). よって, 求める関数は前者の場合 $f(z) = z$, 後者の場合 $f(z) = -\frac{1}{z}$.

(2) $f(\omega) = \frac{a\omega+b}{c\omega+d} = \omega$. $a\omega+b = c\omega^2+d\omega$. $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ だから, $\omega^2 = -\omega - 1$, 故に, $a\omega+b = c(-\omega-1)+d\omega$

$\therefore (a+c-d)\omega+b+c=0$. a, b, c, d は実数だから, $a+c-d=0, b+c=0$. $c=-b, d=a-b$. $ad-bc=1$ より, $a^2-ab+b^2=1$.

$(a-\frac{b}{2})^2 + \frac{3}{4}b^2 = 1$ より, $b^2 \leq \frac{4}{3}$. a, b は整数だから, $(a, b) = (\pm 1, 0), (0, \pm 1), (\pm 1, \pm 1)$ (複号同順).

故に, $(a, b, c, d) = (\pm 1, 0, 0, \pm 1), (0, \pm 1, \pm 1, \pm 1), (\pm 1, \pm 1, \pm 1, 0)$ (複号同順), よって, 求める関数は, 第1の場合 $f(z) = z$, 第2の場合 $f(z) = \frac{-1}{z+1}$, 第3の場合 $f(z) = \frac{z+1}{-z}$.

(3) $z = x + yi$ ($y > 0$) を代入.

$$f(z) = \frac{a(x+yi)+b}{c(x+yi)+d} = \frac{(ax+b)+ayi}{(cx+d)+cyi} \\ = \frac{(ax+b)(cx+d) + acy^2 + (ad-bc)yi}{(cx+d)^2 + (cy)^2}$$

分母 $= (cx+d)^2 + (cy)^2$ は, $c \neq 0$ なら正, $c = 0$ のとき $d \neq 0$ だから, 正. 必ず分母 > 0 . また, 虚数部分は, $ad-bc=1$ より, $\frac{y}{(cx+d)^2 + (cy)^2} > 0$

故に, $z \in H$ ならば, $f(z) \in H$ となっている.

(4) $f(z)$ の値域を V とする. (3) より V は H に含まれる ($V \subseteq H$). V は空集合ではない ($\because f(i) \in H$). いま, V の任意の元 w に対して, $f(z) = w$ となる $z \in H$ が存在するが, $\frac{az+b}{cz+d} = w$ より,

$$z = \frac{dw-b}{-cw+a}. w \in H \text{ で, } (a, c) \neq (0, 0) \text{ だから}$$

(3) より $-cw+a \neq 0$. よって, $f(z) = w$ となる z は唯一つ定まり, (3) と同様に, $d \cdot a - (-b) \cdot (-c)$

$= ad-bc=1$ だから, 関数 $g(z) = \frac{dz-b}{-cz+a}$ は, H を定義域とする関数となる. $g(f(z)) = z$ ①, $f(g(z)) = z$ ② となっているから, $g(z)$ が $f(z)$ の

逆関数である.

故に, $f(z)$ の逆関数は存在し, $f^{-1}(z) = \frac{dz+b}{-cz+d}$.

5

p, q は正の無理数で, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ であるとき二つの集合

$P = \{[p], [2p], [3p], \dots\}$,

$Q = \{[q], [2q], [3q], \dots\}$ について次の間に答えよ. 但し, $[x]$ は x をこえない最大の整数を表す.

(例 $[3.14] = 3$)

(1) 特に, $p = \sqrt{2}$ のとき, 10 以下の整数の範囲で集合 P, Q の元(要素)をそれぞれ書き出せ. (ただし, 記号 $[]$ は用いない.) $\sqrt{2} = 1.41$ として計算してもよい.

(2) $p > 1$ を示せ.

(3) $m < n$ (m, n : 自然数) ならば, $[mp] < [np]$ を証明せよ.

(4) $P \cap Q = \emptyset$ を証明せよ.

(5) 自然数 h が P の元(要素)でないならば, h は Q の元であることを証明せよ.

($h \in P$ ならば $h \in Q$ となること示せ)

($h \notin P$ は, h は P に属さないことを示す)

講評

配点は, (1) 8 点, (2) 6 点, (3) 8 点, (4) 9 点, (5) 9 点としました.

$[]$ はガウス記号といい, 習ったことのない生徒の中には戸惑った人もいると思います. この記号は有名な記号で, 他の問題でもよく使われるので知らなかった人はよくおぼえておいてください.

(1) は, 集合 P, Q が具体的にどうなるかということで, (2) からの抽象的な問題を取り組むための準備として出題した問題です. 具体的な問題だったので過半数の人ができていましたが, 問題の意味を理解していなかったり, ガウス記号をよく分かっていない人もいました.

(2) は, 簡単な問題なのでよくできていました. しかし, 説明不足やポイントをおさえていない答案や, 余計な説明をしている人もいました. やさしい問題でも, ポイントをおさえ, きちんと説明した答案を作成してください.

$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ より, $q = \frac{1}{\frac{1}{p}-1} + 1$ と変形し, こ

の分数式をグラフに表して $p > 1$ を示した人もいました。良いところに目をつけた解答だと思います。

(3)は、問題5で得点の差が出てきた問題だったようです。要点は「 $n > m$ の自然数より、 $n \geq m + 1$ 」
「(2)より $p > 1$ 」を用いる事にあると思います。この2つの事が頭にある生徒はだいたい解答できているようです。

中には、単純に「 $n > m$ より $np > mp$ 」なので、
 $[np] > [mp]$ 」というような答案もありましたが、
「 $\quad$ 」は整数部分を表すので $[np] = [mp]$ とならな
いかが問題となります。そこで、 $[np] = [mp]$ と仮定
して矛盾を導くという背理法でもできます。しかし、
この問題は背理法を使うより解答例のように直接に
証明する方が良いでしょう。

(4)は、得点に結び付いたのは札幌の森卓也君の4
点だけです。背理法を用いる方針で解いていいこうと
している生徒はいましたが、その先をどうすすめて
よいのか分からないというような答案でした。
森君の解答は解答例とは違ったやり方で、次のよ
うな方針ですすめていました。

「 $P \cap Q = \phi$ でないとすると、ある自然数 m, n に
対して、 $[mp] = [np] = x$ (x : 自然数) $mp = x + \alpha$,
 $nq = x + \beta$ ($0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$, α, β は無理数)
ゆえに、 $p = \frac{x + \alpha}{m}$, $q = \frac{x + \beta}{n}$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \text{ より, } \frac{m}{x - \alpha} + \frac{n}{x + \beta} = 1$$

次の様に変形すると、

$(x - m)(x - n) - mn = -(x - m)\beta - (x - n)\alpha - \alpha\beta$
この式より、自然数 x, m, n は $x \geq m$, $x \geq n$ で、
 α, β は $0 < \alpha, \beta < 1$ の無理数であることから矛盾
が生じる。よって、 $P \cap Q = \phi$ 」というような解答で
した。議論の甘さなどがあり9点まで得点できませ
んでしたが、かなりの思考力と計算力を持っている
ように感じました。

(5)は誰もできていませんでした。どこから手を出
していいのかさえ分からないほど難しい問題だった
ようです。

(5)が証明できて $P \cup Q = N$ (N は自然数全体の集
合) となることは分かりますか。少し考えると分か
ると思いますが、次の様なことから言えます。

「 $P \cup Q \subset N$ は明らか。 $P \cup Q \supset N$ を証明す
ればよい。 h が自然数として、 $h \in P$ なら明らかな
ので、 $h \in P$ ならば $h \in Q$ を示せばよい。」

解答例

- (1) $P = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 9\}$
 $Q = \{3, 6, 10\}$

$$(2) \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \text{ を変形して, } \frac{1}{q} = \frac{p-1}{p}$$

$$q > 0 \text{ なので, } \frac{p-1}{p} > 0$$

$$p > 0 \text{ だから, } p-1 > 0, \text{ よって, } p > 1$$

$$(3) \quad mp < mp + 1 < mp + p = (m+1)p \leq np$$

$$\text{ゆえに, } [mp] < [mp + 1] \leq [np]$$

$$\text{よって, } m < n \text{ なら } [mp] < [np]$$

$$(4) \quad P \cap Q \neq \phi \text{ と仮定する。}$$

即ち、 $P \cap Q$ に属する自然数 k が存在する。この
とき $[mp] = k = [np]$ を満たす自然数 m, n が存在
する。

ゆえに、 $k < mp < k + 1$, $k < nq < k + 1$ (p, q は
無理数なので等号はない)

$$\text{変形して, } \frac{m}{k+1} < \frac{1}{p} < \frac{m}{k}$$

$$\frac{n}{k+1} < \frac{1}{q} < \frac{n}{k}$$

$$\text{辺々加えて, } \frac{m+n}{k+1} < \frac{1}{p} + \frac{1}{q} < \frac{m+n}{k}$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \text{ より, } \frac{m+n}{k+1} < 1 < \frac{m+n}{k}$$

ゆえに、 $k < m+n < k+1$ となり、 k, m, n が自
然数であることに不合理。よって、 $P \cap Q = \phi$
(5) $h \in p(3)$ より、 $m < n$ のとき $[mp] < [np]$ な
ので、 $[(m-1)p] < h < [mp]$ となる自然数 m が存
在する。

$$\text{ゆえに, } (m-1)p < h < mp-1$$

$$\text{変形して, } \frac{m-1}{h} < \frac{1}{p} < \frac{m}{h+1}$$

$$\frac{1}{p} = 1 - \frac{1}{q} \text{ より, } \frac{m-1}{h} < 1 - \frac{1}{q} < \frac{m}{h+1}$$

$$\text{ゆえに, } \frac{h-m+1}{h} > \frac{1}{q} > \frac{h-m+1}{h+1}$$

$$\text{変形して, } h < (h-m+1)q < h+1$$

$$\text{よって, } h = [(h-m+1)] \in Q \text{ となる。}$$