第 8 回
北海道高等学校数学コンテスト

問　　　題

平成 2 年 1 月14日(日)

9 時00分～12時30分(210分)

北海道算数数学教育会高等学校部会

問題1　a は $0<a\leqq 4$ をみたす定数である。$0\leqq x\leqq 1$ を定義域とする二次関数 $f(x)=ax(1-x)$ を考える。

(i)　$f(x)=x$ であるような x を $f(x)$ の<u>不動点</u>と定義する。

(ii)　$f[f(x)]=x$ であって，$f(x)\neq x$ であるような x を $f(x)$ の<u>2周期点</u>と定義する。

ここで，$f[f(x)]$ とは関数 $Y=f(X)$ の X に $f(x)$ を代入したものである。例えば $f(x)=2x+3$ とすると

$f[f(x)]=f(2x+3)=2(2x+3)+3=4x+9$ である。

この時，次の(1)~(4)に答えよ。

(1)　$0\leqq x\leqq 1$ である任意の実数 x に対して $0\leqq f(x)\leqq 1$ が成り立つことを示せ。

(2)　$a=\frac{7}{2}$ のとき，次の8個の数のうちから不動点と2周期点を選べ。

$0,\ \frac{1}{7},\ \frac{2}{7},\ \frac{3}{7},\ \frac{4}{7},\ \frac{5}{7},\ \frac{6}{7},\ 1$

(3)　$f(x)$ の不動点をすべて求めよ。

(4)　$3<a\leqq 4$ のとき，$f(x)$ の2周期点をすべて求めよ。

問題2　平行四辺形ABCDがあり，∠A=∠Cは鈍角である。

頂点Bから直線ADに垂線をひき，その足をEとする。Eに関するAの対称点をHとする。またDから直線ABに垂線をひき，その足をFとする。Fに関するAの対称点をGとする。直線BEと直線DFの交点をIとするとき，次の各問に答えよ。

第1問：題意に適する図を書け。(free hand でよい。)

以下の問題は，すべて証明問題であるが，それに必要な点の文字や線はこの図に書き加えよ。

第2問：∠IHG=∠IGH

第3問：∠DIC=∠DBC

第4問：∠HGB=∠DBC

第5問：IC と HG の交点を M としておいて

i）IC⊥HG　ii）HM=MG

問題 3　日本の参議院選挙は比例代表区と地方区に分けて選挙がおこなわれる。比例代表区の議員定数は50議席であり，投票では有権者が政党名を記入する。投票結果にもとづく各党の配分議席数はドント方式によって決定され，各政党があらかじめ順位をつけて提出しておいた候補者のリストから当選議員が選ばれる。

この問題では，ドント方式による各政党の獲得議席数について考えてみる。

ドント方式を説明する前に記号を次のように定義しよう。立候補した政党が A，B，C の 3 つだけだったとしよう。

投票総数（有効投票数）……N

A 党の得票数……$n(\mathrm{A})$　　A 党の得票率……$f(\mathrm{A})=\dfrac{n(\mathrm{A})}{N}$

B 党の得票数……$n(\mathrm{B})$　　B 党の得票率……$f(\mathrm{B})=\dfrac{n(\mathrm{B})}{N}$

C 党の得票数……$n(\mathrm{C})$　　C 党の得票率……$f(\mathrm{C})=\dfrac{n(\mathrm{C})}{N}$

選挙で争う議員定数（総議席数）……M

A 党の議席数……$m(\mathrm{A})$　　A 党の議席率……$g(\mathrm{A})=\dfrac{m(\mathrm{A})}{M}$

B 党の議席数……$m(\mathrm{B})$　　B 党の議席率……$g(\mathrm{B})=\dfrac{m(\mathrm{B})}{M}$

C 党の議席数……$m(\mathrm{C})$　　C 党の議席率……$g(\mathrm{C})=\dfrac{m(\mathrm{C})}{M}$

このようにおくと，

$n(\mathrm{A})+n(\mathrm{B})+n(\mathrm{C})=N$　，　$f(\mathrm{A})+f(\mathrm{B})+f(\mathrm{C})=1$

$m(\mathrm{A})+m(\mathrm{B})+m(\mathrm{C})=M$　，　$g(\mathrm{A})+g(\mathrm{B})+g(\mathrm{C})=1$

が成立する。

たとえば，$N=5000$，$n(\mathrm{A})=2800$，$n(\mathrm{B})=1600$，$n(\mathrm{C})=600$，$M=10$のとき，ドント方式によると，各政党の議席数 $m(\mathrm{A})$，$m(\mathrm{B})$，$m(\mathrm{C})$を次のように決める。

① $n(\mathrm{A})$，$n(\mathrm{B})$，$n(\mathrm{C})$のおのおのを 1，2，3……でそれぞれ割って表 1 をつくる。

② 表 1 にあらわれた数の大きい順に順位をつけていく。（表 1 では小数点以下を切り捨ててかいてあるが，大小の比較は小数点以下も含めておこなう）

③ M 番目で②の作業をうちきり，各政党の横にある順位のついている数の個数を議席数と決める。

例では $M=10$だから，$m(\mathrm{A})=6$，$m(\mathrm{B})=3$，$m(\mathrm{C})=1$ となる。なおこのときの各政党の得票率は，$f(\mathrm{A})=0.56$，$f(\mathrm{B})=0.32$，$f(\mathrm{C})=0.12$

議席率は，$g(\mathrm{A})=0.6$，$g(\mathrm{B})=0.3$，$g(\mathrm{C})=0.1$　となる。

いまの例で議員定数 M が，$M=11$だった場合，表 1 の数で11番目の数が複数あるので $m(\mathrm{A})$，$m(\mathrm{B})$，$m(\mathrm{C})$をうまく決めることができない。この問題では，M 議席目が同順のためうまく決められないような場合を除いて考える。

表 1

	÷1	÷2	÷3	÷4	÷5	÷6	÷7
A 党	①2800	③1400	④ 933	⑥ 700	⑧ 560	⑩ 466	400
B 党	②1600	⑤ 800	⑨ 533	400	320	266	228
C 党	⑦ 600	300	200	150	120	100	85

以上の記号およびドント方式は立候補した政党の数がどんな場合でも同じように適用することができる。

ドント方式に関する次の(1)〜(4)に答えなさい。なお，(2)，(4)については立候補した政党の得票数はいずれも 0 でないと仮定する。

(1) 立候補した政党が A，B，C の 3 つだけで，$N=6000$，$n(\mathrm{A})=3000$，$n(\mathrm{B})=1800$，$n(\mathrm{C})=1200$，$M=7$ のとき，表 1 にあたる表をつくり，$m(\mathrm{A})$ と $m(\mathrm{C})$ を求めなさい。（ヒント：$m(\mathrm{B})=2$ である）

(2) 立候補した政党が A，B の 2 つだけで，$N=2000$，$M=15$ のとき，$f(\mathrm{A})=g(\mathrm{A})$ かつ $f(\mathrm{B})=g(\mathrm{B})$ を満たす自然数 $n(\mathrm{A})$ をすべて求めなさい。

(3) $f(\mathrm{A})\geqq\dfrac{1}{M}$ ならば，立候補した政党の数や得票数，議員定数にかかわらず，$m(\mathrm{A})\geqq 1$ であることを証明しなさい。

(4) 立候補した政党が A，B の 2 つだけであると仮定する。$\dfrac{n(\mathrm{A})}{n(\mathrm{B})}=k$ とおいたとき k が自然数であって，なおかつ $M+1$ が $k+1$ で割りきれないとき，$f(\mathrm{A})\leqq g(\mathrm{A})$ かつ $f(\mathrm{B})\geqq g(\mathrm{B})$ であることを証明しなさい。また，上の不等式の等号が成りたつための必要十分条件を求めなさい。

問題4　関数 $f(x)$, $g(x)$ はすべての実数 x で定義された実数値をとる関数である。また，関数 $\mathrm{F}(x)$ を $\mathrm{F}(x)=f(x)+g(x)i$（i：虚数単位）と定義する。これらの関数は，すべての実数 x, y に対して，次の２つの条件(I), (II)を満たしている。

(I)　$\mathrm{F}(x+y)=\mathrm{F}(x)\mathrm{F}(y)$

(II)　$\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2=k$（k は正の定数）

次の問に答えよ。

(1)　すべての実数 x に対して，$\mathrm{F}(x)\neq 0$ であることを示せ。

(2)　$\mathrm{F}(0)$ の値を求め，さらに $f(0)$, $g(0)$, k　の値を求めよ

(3)　$f(x+y)$, $g(x+y)$ を $f(x)$, $g(x)$, $f(y)$, $g(y)$ で表せ。

(4)　$f(-x)=f(x)$, $g(-x)=-g(x)$ を示せ。

(5)　$\mathrm{F}(x-y)=\dfrac{\mathrm{F}(x)}{\mathrm{F}(y)}$ を示せ。

問題5　k, l, m, n を自然数，p, q を相異なる奇数の素数とする。「n の正の約数すべての和が $2n$ に等しい」とき，n を「完全数」という。

例　６の正の約数は１，２，３，６。$1+2+3+6=12=2\cdot 6$ だから６は完全数。

以下の問いに答えよ。ただし，$(p-1)(1+p+p^2+\cdots+p^k)=p^{k+1}-1$ より

$$1+p+p^2+\cdots+p^k=\frac{p^{k+1}-1}{p-1}$$ を用いてよい。

(1)　２数27，28が，それぞれ完全数であるかないかを調べよ。

(2)　$n=p^k$ は完全数でないことを示せ。

(3)　$n=p^kq^l$ は完全数でないことを示せ。

(4)　$n=3^k5^l7^m$ は完全数でないことを示せ。

平成元年度(平成２年１月14日実施)

第８回
北海道高等学校数学コンテスト

解　答　と　解　説

北海道算数数学教育会高等学校部会

1

a は $0<a\leqq 4$ をみたす定数である。$0\leqq x\leqq 1$ を定義域とする二次関数 $f(x)=ax(1-x)$ を考える。

(i) $f(x)=x$ であるような x を $f(x)$ の不動点と定義する。

(ii) $f(f(x))=x$ であって，$f(x)\neq x$ であるような x を $f(x)$ の2周期点と定義する。

ここで，$f(f(x))$ とは関数 $Y=f(X)$ の X に $f(x)$ を代入したものである。例えば $f(x)=2x+3$ とすると

$f(f(x))=f(2x+3)=2(2x+3)+3=4x+9$ である。

この時，次の(1)~(4)に答えよ。

(1) $0\leqq x\leqq 1$ である任意の実数 x に対して $0\leqq f(x)\leqq 1$ が成り立つことを示せ。

(2) $a=\frac{7}{2}$ のとき，次の8個の数のうちから不動点と2周期点を選べ

$$0,\ \frac{1}{7},\ \frac{2}{7},\ \frac{3}{7},\ \frac{4}{7},\ \frac{5}{7},\ \frac{6}{7},\ 1$$

(3) $f(x)$ の不動点をすべて求めよ。

(4) $3<a\leqq 4$ のとき，$f(x)$ の2周期点をすべて求めよ。

着眼点

(1) 二次関数のグラフを用いて簡単に説明できる。

(2) 実際に代入してみるとよい。

(3) 方程式 $f(x)=x$ すなわち $ax(1-x)=x$ を解けばよい。

(4) 方程式 $f(f(x))=x$ すなわち

$$f(ax(1-x))=a(ax(1-x))(1-(ax(1-x)))$$
$$=a^2x(1-x)(ax^2-ax+1)=x$$

を解けばよい。

四次方程式を解くことになるがこの解が(3)の解を含むことを用いるとよい。

集合Aから A への関数 $f(x)$ において $f(x)=x$ を満たす点 $x\in A$ を不動点という。不動点についても面白い性質がいろいろあるが，不動点の一般化として2周期点，さらに3周期点…を考えていくと非常に簡単な式から不思議な現象が起きることがある。最近極めて盛んになっている「カオスの理論(非線型数学)」はこのような研究から始まった。この分野は数学の分野としても極めて新しく，わずか16年前アメリカで始まって以来世界中で研究がすすんでいる。ふつう式の解は係数を変化させるとその変化に応じて規則的に変化すると考えられていた。しかしアメリカの生物学者 R. May は生物の個体数を表す式（ロジスティック関数）を調べているうちこの関数〔$f(x)=ax(1-x)$〕は a の値によって不思議な変化をすることに気がついて Li, Yorke の二人の数学者に話をした。その事がそれからの理論の展開の発端となった。

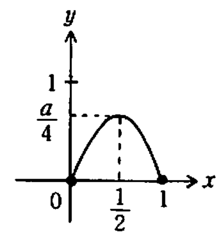
この関数の周期点については数学的にすっかり説明でき，さらにほかの色々な自然現象の解明にも応用されている。

解答例

(1) $0<a<4$ より

$0\leqq x\leqq 1$ ならば

$$f(x)=ax(1-x)$$
$$=ax-ax^2$$
$$=-a\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)+\frac{a}{4}$$
$$=-a\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{a}{4}$$



$$0\leqq f(x)\leqq\frac{a}{4}\leqq 1$$

よって $0\leqq f(x)\leqq 1$

(2) $a=\frac{7}{2}$ とすると $f(x)=\frac{7}{2}x(1-x)$

よって $f(0)=0$	よって $f(f(0))=0$
$f(\frac{1}{7})=\frac{3}{7}$	$f(f(\frac{1}{7}))=\frac{6}{7}$
$f(\frac{2}{7})=\frac{5}{7}$	$f(f(\frac{2}{7}))=\frac{5}{7}$
$f(\frac{3}{7})=\frac{6}{7}$	$f(f(\frac{3}{7}))=\frac{3}{7}$
$f(\frac{4}{7})=\frac{6}{7}$	$f(f(\frac{4}{7}))=\frac{3}{7}$
$f(\frac{5}{7})=\frac{5}{7}$	$f(f(\frac{5}{7}))=\frac{5}{7}$
$f(\frac{6}{7})=\frac{3}{7}$	$f(f(\frac{6}{7}))=\frac{6}{7}$
$f(1)=0$	$f(f(1))=0$

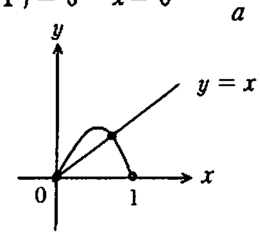
よって上より不動点は $x=0,\ \frac{5}{7}$

2周期点は $x=\frac{3}{7},\ \frac{6}{7}$

(3) $f(x)=ax(1-x)=x$ とおくと　$[0<a\leqq 4]$

$x\{a(1-x)-1\}=0$

$x\{-ax+a-1\}=0$　$x=0$　$\frac{a-1}{a}$



定義域を考えて，$0<a\leqq 1$ のとき $x=0$

$1<a\leqq 4$ のとき，$x=0,\ \dfrac{a-1}{a}$

(4) $f(f(x))=x$ として

$f(ax(1-x))=x$

$a\{ax(1-x)\}\{1-ax(1-x)\}=x$

$a^2x(1-x)(ax^2-ax+1)=x$

$x\{a^2(1-x)(ax^2-ax+1)-1\}=0$

$x\{a^3x^3-2a^3x^2+a^2(a+1)x+1-a^2\}=0$

$x\{ax-(a-1)\}\{a^2x^2-(a^2+a)x+a+1\}=0$

$x=0,\ \dfrac{a-1}{a}$ は不動点だから2周期点ではない。

$g(x)=a^2x^2-(a^2+a)x+a+1$ とおいて，

$g(x)=0$ を解く

$$g(x)=a^2\left\{x-\frac{a+1}{2a}\right\}^2+\frac{-a^2+2a+3}{4}$$

$3<a\leqq 4$ だから

① $g(0)=a+1>0$

② $g(1)=1>0$

③ $\dfrac{2}{3}>\dfrac{a+1}{2a}\geqq\dfrac{5}{8}$ （$0<$軸<1）

④ $D=a^2(a+1)(a-3)>0$

より

$g(x)=0$ は $0\leqq x\leqq 1$ で異なる 2 つの解をもつ。

また

$$g\left(\frac{a-1}{a}\right)=(a-1)^2-(a^2-1)+a+1$$
$$=a^2-2a+1-a^2+1+a+1$$
$$=-a+3\neq 0$$

$g(0)=a+1\neq 0$

ゆえに，$g(x)=0$ の解は不動点と一致しない。

よって

$3<a\leqq 4$ のとき 2 周期点は

$g(x)=0$ を解いて $x=\dfrac{a+1\pm\sqrt{(a-3)(a+1)}}{2a}$

2

平行四辺形ABCDがあり，$\angle A=\angle C$ は鈍角である。頂点 B から直線 AD に垂線をひき，その足を E とする。E に関する A の対称点を H とする。また D から直線 AB に垂線をひき，その足を F とする。F に関する A の対称点を G とする。直線 BE と直線 DF の交点を I とするとき，次の各問に答えよ。

第 1 問：題意に適する図を書け。(free hand でよい。)

以下の問題は，すべて証明問題であるが，それに必要な点の文字や線はこの図に書き加えよ。

第 2 問：$\angle$ IHG$=\angle$ IGH

第 3 問：$\angle$ DIC$=\angle$ DBC

第 4 問：$\angle$ HGB$=\angle$ DBC

第 5 問：IC と HG の交点を M としておいて

i) IC $\perp$ HG　ii) HM$=$MG

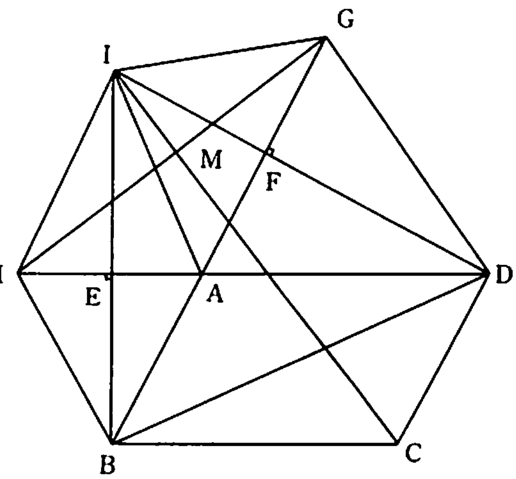
着眼点

1. A が△ IBD の垂心である。
   従って $\angle$ BAD$=180^\circ-\angle$ BID などの関係あり。
2. 円に内接する四辺形の角関係
3. 対称図形の性質
   以上を利用する。

解答例

第 1 問

図



第 2 問　BI は A, H の対称軸であり，また DI は A, G の対称軸であるから

IH$=$IA$=$IG$\therefore\angle$ IHG$=\angle$ IGH

第 3 問　A は Δ IBD の垂心であるから

$\angle$ BCD$=\angle$ BAD$=\angle$ EAF

$=180^\circ-\angle$ BID

$\therefore$ I, B, C, D は同一円周上にある。

i.e. $\angle$ DIC$=\angle$ DBC

第 4 問　$\angle$ IHB$=\angle$ IAB$=180^\circ-\angle$ IDB

$\therefore$ I, H, B, D は同一円周上にあり，同様の理由によって I, B, D, G も同一円周上にある。

3 点 C, H, G は Δ IBD の外接円周上にある。

i.e. $\angle$ HGB$=\angle$ HDB$=\angle$ DBC

第 5 問　i) $\angle$ FIM$=\angle$ DIC$=\angle$ DBC

$=\angle$ HGB$=\angle$ MGF

∴ I，M，F，Gが同一円周上にあり
　$\angle IMG=\angle IFG=90^\circ$
ii）$IH=IG$，$IM\perp HG$ から $HM=MG$

3

日本の参議院選挙は比例代表区と地方区に分けて選挙がおこなわれる。比例代表区の議員定数は50議席であり，投票では有権者が政党名を記入する。投票結果にもとづく各党の配分議席数はドント方式によって決定され，各政党があらかじめ順位をつけて提出しておいた候補者のリストから当選議員が選ばれる。

この問題では，ドント方式による各政党の獲得議席数について考えてみる。

ドント方式を説明する前に記号を次のように定義しよう。立候補した政党がA，B，Cの3つだけだったとしよう。

投票総数（有効投票数）……N

A党の得票数……$n(A)$

A党の得票率……$f(A)=\dfrac{n(A)}{N}$

B党の得票数……$n(B)$

B党の得票率……$f(B)=\dfrac{n(B)}{N}$

C党の得票数……$n(C)$

C党の得票率……$f(C)=\dfrac{n(C)}{N}$

選挙で争う議員定数（総議席数）……M

A党の議席数……$m(A)$

A党の議席率……$g(A)=\dfrac{m(A)}{M}$

B党の議席数……$m(B)$

B党の議席率……$g(B)=\dfrac{m(B)}{M}$

C党の議席数……$m(C)$

C党の議席率……$g(C)=\dfrac{m(C)}{M}$

このようにおくと，

$n(A)+n(B)+n(C)=N$，

$f(A)+f(B)+f(C)=1$

$m(A)+m(B)+m(C)=M$，

$g(A)+g(B)+g(C)=1$

が成立する。

たとえば，$N=5000$，$n(A)=2800$，$n(B)=1600$，$n(C)=600$，$M=10$のとき，ドント方式によると，各政党の議席数 $m(A)$，$m(B)$，$m(C)$ を次のように決める。

① $n(A)$，$n(B)$，$n(C)$のおのおのを1，2，3……でそれぞれ割って表1をつくる。

② 表1にあらわれた数の大きい順に順位をつけていく。（表1では小数点以下を切り捨ててかいてあるが，大小の比較は小数点以下も含めておこなう）

③ M 番目で②の作業をうちきり，各政党の横にある順位のついている数の個数を議席数と決める。

例では $M=10$だから，$m(A)=6$，$m(B)=3$，$m(C)=1$となる。なおこのときの各政党の得票率は，$f(A)=0.56$，$f(B)=0.32$，$f(C)=0.12$

議席率は，$g(A)=0.6$，$g(B)=0.3$，$g(C)=0.1$となる。

いまの例で議員定数 M が，$M=11$だった場合，表1の数で11番目の数が複数あるので $m(A)$，$m(B)$，$m(C)$をうまく決めることができない。この問題では，M 議席目が同順のためうまく決められないような場合を除いて考える。

表1

	÷1	÷2	÷3	÷4	÷5	÷6	÷7
A党	①2800	③1400	④ 933	⑥ 700	⑧ 560	⑩ 466	400
B党	②1600	⑤ 800	⑨ 533	400	320	266	228
C党	⑦ 600	300	200	150	120	100	85

以上の記号およびドント方式は立候補した政党の数がどんな場合でも同じように適用することができる。

ドント方式に関する次の(1)～(4)に答えなさい。なお，(2)，(4)については立候補した政党の得票数はいずれも0でないと仮定する。

(1) 立候補した政党がA，B，Cの3つだけで，$N=6000$，$n(A)=3000$，$n(B)=1800$，$n(C)=1200$，$M=7$のとき，表1にあたる表をつくり，$m(A)$と$m(C)$を求めなさい。（ヒント：$m(B)=2$である）

(2) 立候補した政党がA，Bの2つだけで，$N=2000$，$M=15$のとき，$f(A)=g(A)$かつ$f(B)=g(B)$を満たす自然数$n(A)$をすべて求めなさい。

(3) $f(A)\geqq\dfrac{1}{M}$ならば，立候補した政党の数や得票数，議員定数にかかわらず，$m(A)\geqq1$であることを証明しなさい。

(4) 立候補した政党がA，Bの2つだけであると仮定する。$\dfrac{n(A)}{n(B)}=k$ とおいたとき k が自然数であって，なおかつ $M+1$ が $k+1$ で割りきれないとき，

$f(A)\leqq g(A)$かつ$f(B)\geqq g(B)$

であることを証明しなさい。また，上の不等式の等号が成りたつための必要十分条件を求めなさい。

着眼点

いくつかのものをある基準にもとづいて合理的に分配するにはどうしたらよいか，いくつかの基準にもとづいて順位をつけるにはどうしたらよいか，は現実にはよく問題になる。日本の参議院比例代表区の選挙でも投票パターンから議席をどう配分するかが問題になる。

参議院比例代表区の改選議席数は毎回50議席なので，得票２％ごとに１議席を配分する割合になるが，じっさいの選挙の得票率は35.05％や27.32％や1.55％等であり，ハンパがでてしまう。得票率35.05％の政党へは何議席配分したらよいのだろうか。34％の17議席か，36％の18議席だろうか。議席配分の方法はいろいろとあるが，いずれも政党の得票率のパターンをなるべく比例代表するように考えられている。それらの方法のうち日本の参議院選挙で採用されているドント方式について，得票率のパターンと議席配分のパターンとの関係について出題した。

加減乗除と大小関係（順序づけ）のみで考えられる問題であるが，関係する数が多いため見通しなしに証明にとりかかると，非常にこみいって苦労する。（順序づけとは，不等式に関係するのでけっこうクセモノである）票と議席との対応を自分なりのチャートで整理し，証明すべきことの「現実的な意味」をいくつかの例を自分で試してからとりかかることがコツであろう。証明では整数の整除関係と，「自然数 k, s, t にたいして $s<t$ ならば$\frac{k}{s}>\frac{k}{t}$」等をどう使うかがポイントである。証明はいろいろの方法が考えられる。

(1)は「肩ならし」である。

(2)は，$f(\mathrm{A})=g(\mathrm{A})$に定義式を代入し，整数の整除関係（割りきれる，割りきれない）を用いればよい。

(3)は参議院選挙でいえば，「２％以上の票をとれば，１議席はとれる」ことを証明している。

(4)どんな投票パターンでも，M をあとで決めることができるならば，$M=$「各党の得票数の最小公倍数」とおくことによってすべての政党 X にたいして $f(\mathrm{X})=g(\mathrm{X})$となることがわかる。しかしそれ以外の場合，$f(\mathrm{X})$と $g(\mathrm{X})$には若干のズレが生じる。ズレは大政党に有利（大政党では，得票率より議席率の大きいことが多い）であるといわれているが，そのことを２政党のみの場合で証明する問題である。不等式とその個数等を組み合わせるとき，整数の整除関係をいかにつかうかがポイントである。「$M+1$ が $k+1$ で割りきれないとき」という条件は，同順のため議席定数 M ではうまく決められない場合を除外するための条件である。

現実には，政党の数も多く「一般に大政党が有利という傾向」を厳密に論じることは難しい。しかし，パソコン等でいろいろな投票パターンについてのドント方式による議席配分をシミュレートして考察し，予想をたて，正しいかどうかの証明を試みることをすすめる。

解答例

(1)

	÷１	÷２	÷３	÷４
A 党	①3000	③1500	⑤1000	⑦ 750
B 党	②1800	⑥ 900	600	450
C 党	④1200	600	400	300

$$m(\mathrm{A})=4,\quad m(\mathrm{C})=1$$

(2) $f(\mathrm{A})=g(\mathrm{A})$ より $\dfrac{n(\mathrm{A})}{N}=\dfrac{m(\mathrm{A})}{M}$……①

$N=2000$, $M=15$を①に代入し，分母の最小公倍数（$5\times400\times3$）を両辺にかけると $3\cdot n(\mathrm{A})=400\cdot m(\mathrm{A})$

３と400は互いに素（最小公倍数が１）だから

$n(\mathrm{A})$は400で割りきれる……②

$n(\mathrm{A})>0$, $n(\mathrm{B})>0$ より

$0<n(\mathrm{A})<2000$……③

②③より $n(\mathrm{A})=400$, 800, 1200, 1600。これらのそれぞれに対して $f(\mathrm{B})=g(\mathrm{B})$が成立するから（あるいは$f(\mathrm{B})=1-f(\mathrm{A})$, $g(\mathrm{B})=1-g(\mathrm{A})$から）

答：$n(\mathrm{A})=400$, 800, 1200, 1600

(3) $m(\mathrm{A})<1$ であると仮定して矛盾をみちびく。

議席を獲得した政党を B_1, B_2……B_tとおくと

$m(\mathrm{B}_1)+m(\mathrm{B}_2)+\cdots\cdots+m(\mathrm{B}_t)=M$……④

表１にあらわれた数について

$\dfrac{n(\mathrm{B}_1)}{m(\mathrm{B}_1)}>n(\mathrm{A})$ より $n(\mathrm{B}_1)>m(\mathrm{B}_1)\cdot n(\mathrm{A})$

$\dfrac{n(\mathrm{B}_2)}{m(\mathrm{B}_2)}>n(\mathrm{A})$ より $n(\mathrm{B}_2)>m(\mathrm{B}_2)\cdot n(\mathrm{A})$

……………………………………

$\dfrac{n(\mathrm{B}_t)}{m(\mathrm{B}_t)}>n(\mathrm{A})$ より $n(\mathrm{B}_t)>m(\mathrm{B}_t)\cdot n(\mathrm{A})$

右側の不等式の左辺と右辺とを加えて大小関係を考慮すると

$n(\mathrm{B}_1)+n(\mathrm{B}_2)+\cdots+n(\mathrm{B}_t)$

$\quad>\{m(\mathrm{B}_1)+m(\mathrm{B}_2)+\cdots+m(\mathrm{B}_t)\}\cdot n(\mathrm{A})$

④と $N\geqq n(\mathrm{B}_1)+n(\mathrm{B}_2)+\cdots+n(\mathrm{B}_t)$をつかうと $N>M\cdot n(\mathrm{A})$となる。これより，$\dfrac{1}{M}>\dfrac{n(\mathrm{A})}{N}=f(\mathrm{A})$がみちびかれ，題意と矛盾する。よって $m(\mathrm{A})\geqq1$ であることが証明された。

(4) M を $k+1$ で割って商 q と余り r とを求めることができる。つまり,

$$\left.\begin{array}{l} M=(k+1)q+r \\ 0\leqq q \\ 0\leqq r<k+1 \end{array}\right\}\cdots\cdots⑤$$

を満たす整数 q, r がただ1組存在する。

もし $r=k$ ならば

$M+1=(k+1)q+k+1=(k+1)(q+1)$

で仮定に反するから $r<k$ である。つまり,

$0\leqq r\leqq k-1$ ……⑥

● $q\geqq 1$ のとき

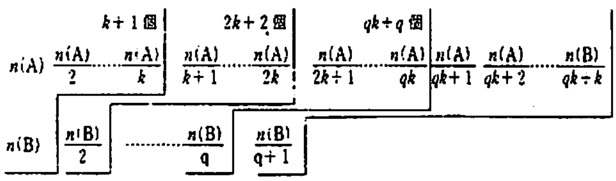
$$\frac{n(\mathrm{A})}{k}=n(\mathrm{B}),\ \frac{n(\mathrm{A})}{2k}=\frac{n(\mathrm{B})}{2},\ \cdots,$$

$$\frac{n(\mathrm{A})}{qk}=\frac{n(\mathrm{B})}{q},\ \frac{n(\mathrm{A})}{(q+1)k}=\frac{n(\mathrm{B})}{q+1}$$

であるから表1の数で大きい方から

$qk+q=(k+1)q$ 番目の数は

$\dfrac{n(\mathrm{A})}{qk}=\dfrac{n(\mathrm{B})}{q}$ である……⑦



また

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{n(\mathrm{A})}{qk}>\dfrac{n(\mathrm{A})}{qk+1}>\dfrac{n(\mathrm{A})}{qk+2}>\cdots>\dfrac{n(\mathrm{A})}{qk+k} \\ \dfrac{n(\mathrm{B})}{q}>\dfrac{n(\mathrm{B})}{q+1} \end{array}\right\}\cdots\cdots⑧$$

も成立する

⑤⑦⑧よりドント方式の表1の大きい方から M 番目の数は

$\dfrac{n(\mathrm{A})}{qk+r}$ であることがわかる……⑨

● $q=0$ のとき, $r=M\leqq k-1$ であるから

$$\frac{n(\mathrm{A})}{M}=\frac{n(\mathrm{A})}{r}\geqq\frac{n(\mathrm{A})}{k-1}>\frac{n(\mathrm{A})}{k}=n(\mathrm{B})$$

よってドント方式の表1の大きい方から M 番目の数は, $\dfrac{n(\mathrm{A})}{qk+r}$ であることがわかる……⑩

⑨⑩から $m(\mathrm{A})=qk+r$, $m(\mathrm{B})=q$ ……⑪

$$f(\mathrm{A})=\frac{n(\mathrm{A})}{N}=\frac{n(\mathrm{A})}{n(\mathrm{A})+n(\mathrm{B})}$$
$$=\frac{k\cdot n(\mathrm{B})}{k\cdot n(\mathrm{B})+n(\mathrm{B})}=\frac{k}{k+1}$$
$$g(\mathrm{A})=\frac{m(\mathrm{A})}{M}=\frac{qk+1}{(k+1)q+r}$$
$$\geqq\frac{qk}{(k+1)q}=\frac{k}{k+1}=f(\mathrm{A})$$

等号は $r=0$ のときに限る

上の不等式は次の補題をつかっている。

$$\left(\begin{array}{l} x>y\geqq 0 \text{ かつ } a\geqq 0 \text{ ならば} \dfrac{y+a}{x+a}\geqq\dfrac{y}{x} \\ \text{であり,等号は } a=0 \text{ のときに限る} \end{array}\right)$$

$r=0$ ということは, M が $k+1$ で割りきれることと同値である。

$f(\mathrm{A})+f(\mathrm{B})=g(\mathrm{A})+g(\mathrm{B})=1$ だから,

$f(\mathrm{A})\geqq g(\mathrm{A})$ ならば $f(\mathrm{B})\leqq g(\mathrm{B})$ である

等号のための条件も同じである。(証明終わり)

等号が成りたつための条件は M が $k+1$ で割りきれることである。

4

関数 $f(x)$, $g(x)$ はすべての実数 x で定義された実数値をとる関数である。また,関数 $\mathrm{F}(x)$ を $\mathrm{F}(x)=f(x)+g(x)i$ (i:虚数単位)と定義する。これらの関数は,すべての実数 x, y に対して,次の2つの条件(I), (II)を満たしている。

(I) $\mathrm{F}(x+y)=\mathrm{F}(x)\mathrm{F}(y)$

(II) $\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2=k$ (k は正の定数)

次の問に答えよ。

(1) すべての実数 x に対して, $\mathrm{F}(x)\neq 0$ であることを示せ。

(2) $\mathrm{F}(0)$ の値を求めて,さらに $f(0)$, $g(0)$, k の値を求めよ

(3) $f(x+y)$, $g(x+y)$ を $f(x)$, $g(x)$, $f(y)$, $g(y)$ で表せ。

(4) $f(-x)=f(x)$, $g(-x)=-g(x)$ を示せ。

(5) $\mathrm{F}(x-y)=\dfrac{\mathrm{F}(x)}{\mathrm{F}(y)}$ を示せ。

着眼点

関数 $f(x)$, $g(x)$ の1つの例として, $f(x)=\cos x$, $g(x)=\sin x$ であることに気が付くか。a, b, c, d が実数のとき, $a+bi=c+di$ ならば $a=c$, $b=d$ である。

(1) 簡単な問題であるが,きちんと証明できるか。

(2) $\mathrm{F}(x+y)=\mathrm{F}(x)\mathrm{F}(y)$ に $x=y=0$ を代入する

(3) $\mathrm{F}(x+y)=\mathrm{F}(x)\mathrm{F}(y)$ を, $\mathrm{F}(x)=f(x)+g(x)i$ より2つの関数 $f(x)$, $g(x)$ で表す。$\cos(x+y)$, $\sin(x+y)$ の加法定理にあたる。

(4) $f(x)=\cos x$ は偶関数, $g(x)=\sin x$ は奇関数

(5) 別解のように $\mathrm{F}(x+y)=\mathrm{F}(x)\mathrm{F}(y)$ からでも証明できる。

解答例

(1) $F(x)=f(x)+g(x)i=0$ となる x が存在するなら，この x に対して，$f(x)=0$，$g(x)=0$ となり，条件(II)より $\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2$ は正の定数であることに反する。よって，すべての実数 x に対して $F(x)\neq 0$ である。

(2) $x=y=0$ を，$F(x+y)=F(x)F(y)$ に代入すると，

$F(0)=F(0)F(0)$

(1)より，$F(0)\neq 0$ なので，$\underline{F(0)=1}$

関数 $F(x)$ の定義より，$F(0)=f(0)+g(0)i=1$

関数 $f(x)$，$g(x)$ は実数値をとる関数であることより，$\underline{f(0)=1,\ g(0)=0}$

条件(II)より，すべての実数 x に対して

$\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2$ は定数となることから，

$k=\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2=\{f(0)\}^2+\{g(0)\}^2$

$=1^2+0^2\underline{=1}$

(3) 条件(I)より，

$$\begin{aligned}\text{左辺}&=F(x+y)\\&=f(x+y)+g(x+y)i\\\text{右辺}&=F(x)F(y)\\&=\{f(x)+g(x)i\}\times\{f(y)+g(y)i\}\\&=f(x)f(y)-g(x)g(y)\\&\quad+\{f(x)g(y)+g(x)f(y)\}i\end{aligned}$$

左辺と右辺の実部と虚部を比較すると，

$\underline{f(x+y)=f(x)f(y)-g(x)g(y),}$

$\underline{g(x+y)=f(x)g(y)+g(x)f(y)}$

(4) (3)で求めた式に $y=-x$ を代入すると，

$f(0)=f(x)f(-x)-g(x)g(-x)$

$g(0)=f(x)g(-x)+g(x)f(-x)$

(2)より，$f(0)=1$，$g(0)=0$ なので

$f(x)f(-x)-g(x)g(-x)=1$ ……①

$f(x)g(-x)+g(x)f(-x)=0$ ……②

①$\times f(x)+$②$\times g(x)$ を計算すると，

$\left\{\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2\right\}f(-x)=f(x)$

(2)で求めた $\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2=1$ より，

$f(-x)=f(x)$ となる。

同様に②$\times f(x)-$①$\times g(x)$ を計算すると，

$\{\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2\}g(-x)=-g(x)$

よって，$g(-x)=-g(x)$

(5) 左辺$=F(x-y)$

$=f(x-y)+g(x-y)i$

ここで，
$$\begin{aligned}f(x-y)&=f(x+(-y))\\&=f(x)f(-y)-g(x)g(-y)\\&=f(x)f(y)-g(x)\{-g(y)\}\\&=f(x)f(y)+g(x)g(y)\\g(x-y)&=g(x+(-y))\\&=g(x)f(-y)+f(x)g(-y)\\&=g(x)f(y)+f(x)\{-g(y)\}\\&=g(x)f(y)-f(x)g(y)\end{aligned}$$

ゆえに，

左辺$=f(x)f(y)+g(x)g(y)$
$\quad+\{g(x)g(y)-f(x)g(y)\}i$

$$\begin{aligned}\text{右辺}&=\frac{F(x)}{F(y)}=\frac{f(x)+g(x)i}{f(y)+g(y)i}\\&=\frac{\{f(x)+g(x)i\}\{f(y)-g(y)i\}}{\{f(y)+g(y)i\}\{f(y)-g(y)i\}}\\&=\frac{f(x)f(y)+g(x)g(y)+\{g(x)f(y)-f(x)g(y)\}i}{\{f(y)\}^2+\{g(y)\}^2}\end{aligned}$$

$\{f(y)\}^2+\{g(y)\}^2=1$ なので，

右辺$=f(x)f(y)+g(x)g(y)$
$\quad+\{g(x)f(y)-f(x)g(y)\}i$

ゆえに，左辺＝右辺

よって，$F(x-y)=\dfrac{F(x)}{F(y)}$

(別解)

$F(x+y)=F(x)F(y)$ に $y=-x$ を代入すると，

$F(0)=F(x)F(-x)$

$1=F(x)F(-x)$

ゆえに，$F(-x)=\dfrac{1}{F(x)}$

よって，
$$\begin{aligned}F(x-y)&=F(x+(-y))\\&=F(x)F(-y)\\&=F(x)\frac{1}{F(y)}=\frac{F(x)}{F(y)}\end{aligned}$$

5

問題５　k，l，m，n を自然数，p，q を相異なる奇数の素数とする。「n の正の約数すべての和が$2n$ に等しい」とき，n を「完全数」という。

例　6の正の約数は1，2，3，6。$1+2+3+6=12=2\cdot 6$ だから6は完全数。以下の問いに答えよ。ただし，$(p-1)(1+p+p^2+\cdots+p^k)=p^{k+1}-1$ より $1+p+p^2+\cdots+p^k=\dfrac{p^{k+1}-1}{p-1}$ を用いてよい。

(1) 2数27，28が，それぞれ完全数であるかないかを調べよ。

(2) $n=p^k$ は完全数でないことを示せ。

(3) $n=p^kq^l$ は完全数でないことを示せ。

(4) $n=3^k5^l7^m$ は完全数でないことを示せ。

着眼点

偶数の完全数は，$2^{p-1}(2^p-1)$〔2^p-1が素数となるもの〕に限られている。(Euler)

奇数の完全数は，現在のところ発見されていない。また，存在しないことも証明されていない。

ただ，必要条件はいくつか出ている。

(i) $4k+1$の奇数に限る。

(ii) 素因数を7個以上もつ。

など。現在10^{50}以下では奇数の完全数がないことがわかっている。

nが奇数の完全数ならば，

$n=p^{\alpha}\cdot M^2$ ($p=4k+1$の素数，$\alpha=4l+1$の自然数，Mはpと互いに素な奇数）の形に限る。

皆さんも，素因数の個数をふやして，存在しないことを証明してみて下さい。期待します。

解答例

(1) 27の約数は1，3，9，27の4つ。総和は，$1+3+9+27=40\neq 2\cdot 27$。よって，27は完全数ではない。

28の約数は，1，2，4，7，14，28の6つ。総和は，$1+2+4+7+14+28=56=2\cdot 28$。よって，28は完全数である。

(2) 完全数であると仮定すると，

$$1+p+p^2\cdots\cdots+p^k=\frac{p^{k+1}-1}{p-1}=2p^k$$

$$\therefore\quad 1-\frac{1}{p^{k+1}}=2\left(1-\frac{1}{p}\right)$$

$p\geqq 3$だから，右辺$=2\left(1-\dfrac{1}{p}\right)\geqq\dfrac{4}{3}>1$

一方，左辺<1。矛盾。故に，$n=p^k$は完全数でない。

(3) 完全数であると仮定すると，

$$(1+p+p^2+\cdots+p^k)(1+q+q^2+\cdots+q^l)$$

$$=\frac{p^{k+1}-1}{p-1}\cdot\frac{q^{l+1}-1}{q-1}=2p^kq^l$$

$$\therefore\left(1-\frac{1}{p^{k+1}}\right)\left(1-\frac{1}{q^{l+1}}\right)=2\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{q}\right)$$

いま，$p<q$としてよいから，$p\geqq 3$，$q\geqq 5$

右辺$\geqq 2\left(1-\dfrac{1}{3}\right)\left(1-\dfrac{1}{5}\right)=\dfrac{16}{15}>1$

一方，左辺<1。矛盾。故に，$n=p^kq^l$は完全数でない。

(4) 完全数であると仮定すると，

$$\left(1-\frac{1}{3^{k+1}}\right)\left(1-\frac{1}{5^{l+1}}\right)\left(1-\frac{1}{7^{m+1}}\right)$$

$$=2\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)=\frac{32}{35}$$

$k\geqq 3$なら，左辺$\geqq\left(1-\dfrac{1}{3^4}\right)\left(1-\dfrac{1}{5^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{7^2}\right)$

$$=\frac{80}{81}\cdot\frac{24}{25}\cdot\frac{48}{49}=\frac{2048}{2205}>\frac{2016}{2205}=\frac{32}{35}$$

よって，$k=1$，2

$k=1$のとき

$$\left(1-\frac{1}{5^{l+1}}\right)\left(1-\frac{1}{7^{m+1}}\right)=\frac{32}{35}\times\frac{9}{8}=\frac{36}{35}>1$$

(不成立)

$k=2$のとき

$$\left(1-\frac{1}{5^{l+1}}\right)\left(1-\frac{1}{7^{m+1}}\right)$$

$$=\frac{32}{35}\times\frac{27}{26}=\frac{432}{455}=\frac{2^4\times 3^3}{5\times 7\times 13}$$

左辺の分母には，13なる素因数はでてこないので，不成立。

故に，$n=3^k5^l7^m$は完全数ではない。

第　8　回

北海道高等学校数学コンテスト

採点を終えて

平成２年１月14日（日）実施

北海道算数数学教育会高等学校部会

第8回「数学コンテスト」を終えて

北海道算数数学教育会高校部会長
（北海道札幌平岸高等学校長）　佐々木　光　明

「数学は何故必要か」学習に苦しむ生徒がよく口にする。「数学そのものより，その考え方が大切である」と教師は説明する。まさにこの通り，数学そのものを研究しようとする人は別として，一般的にいわゆる数学的思考を身につけることは，高度情報化社会に生きるものにとって必要不可欠なものであり，大切なことと思います。

それではこのような思考はどのようにして養われるのでしょうか。それには一つは多くの問題を解き，その過程で身につけることです。単に問題が出来たかどうかでなく，そのねらいとする所を大きく捉えてあたってもらいたいものです。このコンテストにも，このような意図が含まれています。

今年で8回を迎えたこのコンテストも全道より26校243名の参加により，主会場を札幌平岸高等学校として実施することが出来ました。皆さんの真剣で意欲的な態度にたのもしさと力強さを感じました。今回優れた成績をおさめた人おめでとう。自信を持って今後とも精進して戴きたい。また受験された皆さんも更に各自努力されるとともに皆さんの学校での数学愛好者を一人でも多く増やし，21世紀に生きる為の思考を身につけるべく共に励まし合いながら学習して戴きたいと願っております。頑張って下さい。

このコンテスト，これまでずっと続けられたのも，すべてを担当された本部会研究部の方々の献身的なご努力によるものと厚くお礼申しあげます。また最後になりましたが，北海道教育委員会，札幌市教育委員会，高等学校長協会より賜りました御後援及び北海道新聞社，福武書店の物心両面にわたってのご援助に深く感謝申し上げます。

●成績優秀者

伊山　修	近藤哲史	吉井彰規	浜　幸寛
谷口智之	島　尚亮	中川俊一	福島宏文
尾形昭史	大島　環	井上大成	森脇拓也
東藤正樹	大橋正法	長内　研	椎名俊典
山田　浩	岩山祐司	小甲　正	北　淳司

第8回　数学コンテスト度数分布

得点	問1	問2	問3	問4	問5
40	1	8	0	4	1
39	0	1	0	0	0
38	2	4	0	4	0
37	0	0	2	0	0
36	0	1	0	0	0
35	0	0	1	0	0
34	3	5	0	3	0
33	0	0	0	0	0
32	10	8	0	1	0
31	1	1	0	0	0
30	1	1	0	7	0
29	1	0	0	1	0
28	4	8	2	7	2
27	0	1	0	1	0
26	11	4	1	1	0
25	0	1	2	1	0
24	17	16	2	13	1
23	2	1	0	3	0
22	10	11	0	2	1
21	1	1	0	0	1
20	25	6	45	0	9
19	0	2	2	5	2
18	3	15	25	3	11
17	0	0	3	0	0
16	17	38	12	4	23
15	8	2	2	1	2
14	4	9	30	1	14
13	1	0	2	0	0
12	33	15	30	1	10
11	2	0	0	2	1
10	9	14	41	1	34
9	0	0	1	0	0
8	9	42	3	5	85
7	0	1	0	4	0
6	3	11	5	0	16
5	2	1	0	33	1
4	22	2	6	0	7
3	1	0	0	2	0
2	8	7	1	2	0
1	0	0	0	0	0
0	32	6	25	131	22
受験者数	243	243	243	243	243
総計	3,451	4,032	3,255	1,913	2,453
平均点	14.2	16.6	13.4	7.9	10.1
S・D	9.9	9.7	6.9	11.5	5.7

階級	合計
200 ～ 200	0
195 ～ 199	0
190 ～ 194	0
185 ～ 189	1
180 ～ 184	0
175 ～ 179	0
170 ～ 174	0
165 ～ 169	0
160 ～ 164	1
155 ～ 159	0
150 ～ 154	0
145 ～ 149	1
140 ～ 144	4
135 ～ 139	0
130 ～ 134	2
125 ～ 129	2
120 ～ 124	2
115 ～ 119	3
110 ～ 114	4
105 ～ 109	6
100 ～ 104	11
95 ～ 99	10
90 ～ 94	9
85 ～ 89	8
80 ～ 84	4
75 ～ 79	11
70 ～ 74	6
65 ～ 69	13
60 ～ 64	13
55 ～ 59	8
50 ～ 54	24
45 ～ 49	17
40 ～ 44	16
35 ～ 39	18
30 ～ 34	16
25 ～ 29	8
20 ～ 24	8
15 ～ 19	5
10 ～ 14	7
5 ～ 9	4
0 ～ 4	1
243	
15,104	
62.2	
10.9	

1

aは$0<a\leqq 4$をみたす定数である。$0\leqq x\leqq 1$を定義域とする二次関数$f(x)=ax(1-x)$を考える。

(i) $f(x)=x$であるようなxを$f(x)$の<u>不動点</u>と定義する。

(ii) $f[f(x)]=x$であって，$f(x)\neq x$であるようなxを$f(x)$の<u>2周期点</u>と定義する。

ここで，$f[f(x)]$とは関数$Y=f(X)$のXに$f(x)$を代入したものである。例えば$f(x)=2x+3$とすると

$f[f(x)]=f(2x+3)=2(2x+3)+3=4x+9$である。

この時，次の(1)～(4)に答えよ。

(1) $0\leqq x\leqq 1$である任意の実数xに対して$0\leqq f(x)\leqq 1$が成り立つことを示せ。

(2) $a=\dfrac{7}{2}$のとき，次の8個の数のうちから不動点と2周期点を選べ

$$0,\ \frac{1}{7},\ \frac{2}{7},\ \frac{3}{7},\ \frac{4}{7},\ \frac{5}{7},\ \frac{6}{7},\ 1$$

(3) $f(x)$の不動点をすべて求めよ。

(4) $3<a\leqq 4$のとき，$f(x)$の2周期点をすべて求めよ。

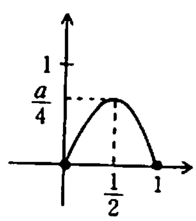
解答例・配点

(1) $f(x)=ax(1-x)$

$=-ax^2+ax$

$=-a(x^2-x+\dfrac{1}{4})+\dfrac{a}{4}$

$=-a(x-\dfrac{1}{2})^2+\dfrac{a}{4}$



$0\leqq x\leqq 1$，また$0<a\leqq 4$より

$0\leqq f(x)\leqq\dfrac{a}{4}\leqq 1$

よって$0\leqq f(x)\leqq 1$　〔8点〕

(2) $a=\dfrac{7}{2}$とすると　$f(x)=\dfrac{7}{2}x(1-x)$

よって$f(0)=0$　　よって$f(f(0))=0$

$f(\frac{1}{7})=\frac{3}{7}$　　$f(f(\frac{1}{7}))=f(\frac{3}{7})=\frac{6}{7}$

$f(\frac{2}{7})=\frac{5}{7}$　　$f(f(\frac{2}{7}))=f(\frac{5}{7})=\frac{5}{7}$

$f(\frac{3}{7})=\frac{6}{7}$　　$f(f(\frac{3}{7}))=f(\frac{6}{7})=\frac{3}{7}$

$f(\frac{4}{7})=\frac{6}{7}$　　$f(f(\frac{4}{7}))=f(\frac{6}{7})=\frac{3}{7}$

$f(\frac{5}{7})=\frac{5}{7}$　　$f(f(\frac{5}{7}))=f(\frac{5}{7})=\frac{5}{7}$

$f(\frac{6}{7})=\frac{3}{7}$　　$f(f(\frac{6}{7}))=f(\frac{3}{7})=\frac{6}{7}$

$f(1)=0$　　$f(f(1))=f(0)=0$

よって　不動点は$x=0,\ \dfrac{5}{7}$

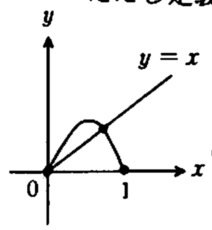
2周期点は$x=\dfrac{3}{7},\ \dfrac{6}{7}$　〔8点〕

(3) $f(x)=ax(1-x)=x$とおくと（$0<a\leqq 4$）

$x\{a(1-x)-1\}=0$

$x(-ax+a-1)=0$　$\therefore x=0,\ \dfrac{a-1}{a}$

ただし定義域を考えて吟味して



① $0<a\leqq 1$のとき　不動点

$x=0$　（$x=\dfrac{a-1}{a}$は含まれない）

② $1<a\leqq 4$のとき　不動点

$x=0,\ \dfrac{a-1}{a}$　〔12点〕

(4) $f(f(x))=x$として

$f(ax(1-x))=x$

$a\{ax(1-x)\}\{1-ax(1-x)\}=x$

$a^2x(1-x)(ax^2-ax+1)=x$

$\therefore x\{a^2(1-x)(ax^2-ax+1)-1\}=0\cdots$Ⓐ

$x\{a^3x^3-2a^3x^2+a^2(a^2+1)x+1-a^2\}=0\cdots$Ⓐ

ここで上の式は<u>$\{ax-(a-1)\}$を因数にもつので</u>

$x\{ax-(a-1)\}\{a^2x^2-(a^2+a)x+a+1\}=0\cdots$Ⓐ

ここで$x=0,\dfrac{a-1}{a}$は不動点より2周期点ではない

よって$g(x)=a^2x^2-(a^2+a)x+a+1$とおいて

$g(x)=0$を解く。

$g(x)=a^2\{x-\dfrac{a+1}{2a}\}^2+\dfrac{-a^2+2a+3}{4}$

ここで$3<a\leqq 4$より

① $g(0)=a+1>0$

② $g(1)=1>0$

③ $\dfrac{2}{3}>\dfrac{a+1}{2a}\geqq\dfrac{5}{8}$　（$0<$軸<1）

④ $D=a^2(a+1)(a-3)>0$

より$g(x)=0$は$0<x<1$で異なる実数解をもつ

また$g(\dfrac{a-1}{a})=(a-1)^2-(a^2-1)+a+1$

$=-a+3\neq 0$

$g(0)=a+1\neq 0$　より

$g(x)=0$の解は不動点と一致しない

よって$3<a\leqq 4$のとき　2周期点は

$g(x)=0$を解いて$x=\dfrac{a+1\pm\sqrt{(a-3)(a+1)}}{2a}$

〔12点〕

講　評

(1), (2)はやさしいのでみんなもっと得点をしてくれるだろうと思っていたら，予想外にできが悪かった。(1)は $0 \leqq x \leqq 1$ における $f(x)$ の最大値，最小値を求める問題と考えるとやさしい。二次関数のグラフを考えると最小値 0，最大値 $\frac{a}{4}$ となり，$0 < a \leqq 4$ より $0 \leqq f(x) \leqq 1$ となる。

(2)は苦労して二次方程式，四次方程式を解いている人が多かったが，解答例のように直接代入して解いた方が楽である。2周期点とか不動点とかいうことばに迷わされて(1)のグラフから $x=0$，1 が不動点などという人もいたが，定義をそのままあてはめればよい。

(3)は(2)とちがって実際に方程式を解かねばならない。方程式自体はふつうに因数分解できるが，定義域 $0 \leqq x \leqq 1$ に含まれているかの吟味をしなければ完全ではない。また吟味はしてあってもかきかたに不備のあった人も多い。

「$x=0,\ \frac{a-1}{a}\ (1 < a \leqq 4)$」という書き方ではダメである。解答例の書き方をみてほしい。

(4)は 4 次方程式を解かねばならない。Ⓐまでいっていきずまった人も多いが，Ⓐの式の解の中に $x=0,\ \frac{a-1}{a}$ があることに気がつけば因数分解できる。だから $g(x)=0$ を解けばよいのだが，そのときに吟味すべきことは 2 つある。

ひとつはこの解が定義域 $0 \leqq x \leqq 1$ に含まれていること，もうひとつは(3)で求めた不動点と重ならないことである。この吟味を完全に行った人は一人しかいなかった。ほとんど惜しいところまで行っていたのは，札幌の東藤君（受験番号100），旭川の谷口君（受験番号607）であった。

ところで解答例とは異なるやり方で完璧な解答があったのでぜひ紹介したい。札幌の伊山君（受験番号72）の答案である。見事なものである。

(4)　$f(x)=y$ とおくと　$f(y)=x\ (x \neq y)$

となる x を求めればよい

$$\begin{cases} ax(1-x)=y & -ax^2+ay=y \quad \cdots\cdots① \\ ay(1-y)=x & -ay^2+ay=x \quad \cdots\cdots② \end{cases}$$

①−②より　$-a(x^2-y^2)+a(x-y)=y-x$

$x \neq y$ より　$-a(x+y)+a+1=0$

$a \neq 0$ より $x+y=\frac{a+1}{a}$

よって $y=\frac{a+1}{a}-x$ を①に代入

$ax-ax^2=-x+\frac{a+1}{a}$

$\therefore ax^2-(a+1)x+\frac{a+1}{a}=0$

$\therefore a^2x^2-a(a+1)x+a+1=0$

これを解いて

$$x=\frac{(a+1)\pm\sqrt{(a-3)(a+1)}}{2a}$$

$a>3$ より $(a-3)(a+1)>0$〔実数条件〕

また $(a-3)(a+1)=a^2-2a-3<(a-1)^2$ より

$$0<\frac{1}{a}=\frac{a+1-(a-1)}{2a}<\frac{a+1-\sqrt{(a-3)(a+1)}}{2a}$$

$$<\frac{a+1+\sqrt{(a-3)(a+1)}}{2a}<\frac{a+1+(a-1)}{2a}=1$$

よってこれらは $0 \leqq x \leqq 1$ の範囲にある。

よって 2 周期点は $\frac{a+1\pm\sqrt{(a-3)(a+1)}}{2a}$

伊山君以外にも印象に残る答案はあった。

(1), (3)でユニークな方法を用いていた函館の藤戸君（519），尾形君（529）。時間がもっとあれば完全にできたのではと思わせる室蘭の瀬川さん（704）など。今まで挙げた以外の高得点者をあげる。

札幌の鈴木君(10)，遠藤君(73)，田村君(105)，
亀井君(112)，小山内君(124)，黄田君(132)，
岩山君(136)，大橋君(141)
小樽の近藤君(403)
函館の片岡君(505)，本間君(510)，井上君(512)
岩見沢の大島君(866)。

一年生諸君はぜひ次回また受けてほしい。

2

平行四辺形ＡＢＣＤがあり，∠Ａ=∠Ｃは鈍角である。頂点Ｂから直線 AD に垂線をひき，その足をＥとする。Ｅに関するＡの対称点をＨとする。またＤから直線 AB に垂線をひき，その足をＦとする。Ｆに関するＡの対称点をＧとする。直線 BE と直線 DF の交点をＩとするとき，次の各問に答えよ。

第１問：題意に適する図を書け。(free hand でよい。)

以下の問題は，すべて証明問題であるが，それに必要な点の文字や線はこの図に書き加えよ。

第２問：∠IHG=∠IGH

第３問：∠DIC=∠DBC

第４問：∠HGB=∠DBC

第５問：IC と HG の交点を M としておいて
　ｉ）IC ⊥ HG　ⅱ）HM=MG

1. 配点基準

第1問　作図8点　第2，3，4問　各8点

第5問　i）4点　ii）4点　計40点

とし各問毎に，完全解でなくても出来具合によって，部分点を2，4，6点与えた。

2. 感　想

ほとんどの人が第1問の作図には挑戦してくれた。感謝します。ただ中には▱ABCDを時計廻りに書いたり（これは反時計廻りに書くのが普通です。減点はしませんでした。）∠Aを鋭角に書いた人がいました。又Eを対称の中心にすべき所を，Aを中心に取って，証明を困難にした人もずいぶんいました。くれぐれもあせったり先入感を持たないで，平静に仮定を読みなおすことをおすすめします。なお作図が終りいよいよ問題を考えるにあたって，むやみに補助線を引いて図を複雑にしすぎて，かえってそれらの線が思考のじゃまになって失敗している例も見受けられました。補助線は仮定から論理を進める上で，又は結論を導くための必要最小限に止めるべきで，余計な線はなるべく引かない様に，あるいは消し去って考えるくせをつけるよう心がけて下さい。それから文字が乱暴で判読に苦しむものも多数ありました。時間に追われてあせるのもむりはありませんが，なぐりがきは決して時間の節約にはつながらないものです。ゆっくり丁寧に書くくせをつけること。ゆっくり書いていてもその間，頭は休んでいるわけではないのです。否むしろその間にも反省やら取りまとめ，ひいては次の段階への模索すら行なわれているものなのです。書いている間に名案がひらめくことすらあります。これはしかし，なぐり書きの間には期待出来ません。ゆっくり丁寧に書く事は，自分の書いた事を全部十分に読み取ってもらえる事からも，一挙両得になるはずです。かく言う筆者も実は君達の年齢の頃は答案はなぐり書きでした。尊敬する数学の先生に，「君の答案は読みにくくて困る。」としばしば注意されても，「何！出来てりゃ文句ないだろう。」と思い上って，一向に改めようとしなかった事が思い出されます。しかし小学校の教員になって，はじめて二年生をうけもたされたとき，「先生の字，よめないよう。」と言われてはじめて，悪筆の罪に気づき，それからは板書の文字はていねいに教科書を見てまねるけいこをしました。悪筆は天分ではなくて，なおるものなんですね。今でも人から「うまい。」とは言われませんが，「きれいで，よみやすい。」とほめられます。なぐり書きを自慢の人の参考までに。

3. 出題の意図

i）対称図形の性質

ii）円に内接する多角形の角関係

を利用して如何にして解に到達するか，さらに欲を言えば，如何に簡明に答案に表現するか，までねらった出題であった。

最も簡明は採点者に取ってよろこばしい事ではあるが，逆にどうにか筋が通っているものを複雑冗長だからといって減点はしていません。例えば問題の証明で

解答例1

「IG＝IH　∴∠IHG＝∠IGH」

と一行か，せいぜい二行ですむものを

解答例2

「IG＝IH

よって　△IGHは二等辺三角形

∴∠IHG＝∠IGH」　――なくてもよい。

この位はいいとしても

解答例3

「IG＝IH

よって　△IGHは二等辺三角形である。

二等辺三角形の両底角は等しいから

∠IHG＝∠IGH」

に至っては，ていねいすぎて，こっけいでさえある。これでは採点者を馬鹿にしているんでないか？　とさえ感じられる。ふだんの授業と答案とでは立場がちがう事に留意しなくては。授業では経験者が未経験者に教えるのだから，前記最後の例の様な説明をして二等辺三角形の性質も復習するのは必要であるがそれでもあまりくどくど根拠をのべていると有能な生徒はあきてくるものである。生徒の実力に応じた簡明さが要求されるわけである。まして答案を書くに当っては，相手は生徒でなく，解答者がどの程度わかっているかを判定する先生なんだから，前記解答例1の程度で十分わかってもらえるものである。

尚もっとくどい答案としては，解答例3の二等辺三角形の両底角が等しい事をわざわざ三角形の合同にまでさかのぼって証明した人が何人もいた事です。対称性を使えば簡単に言えるわけだから，そこをねらった出題だったわけです。

しかし簡明簡明と言っても程度問題です。省略，省略のあまり根拠と結論があまりにかけはなれすぎるといけません。「この生徒はほんとうに証明が出来たのかな。くわしくいえと言ったら正確に根拠と結

論の間をつなぐ事が出来るかしら？　或いは出来ない所をゴマ化してしまったのではないかな？」と疑問を持たれる答案がよくあります。

答案例

旭川東　T君

第5問

i）$\triangle ADF$と$\triangle GDF$において
　$GF=AF$，DF共通
　$\angle DFA=\angle DFG$
$\therefore \triangle ADF\equiv\triangle GDF$ ……………①
よって　$AD=DG$
同様に$\triangle ABE$と$\triangle HBE$においても
　　$AB=HB$
$\triangle BCH$と$\triangle DGC$において
$BC=AD$，$AD=DG$より
　　$BC=DG$……………④
同様に　$HB=CD$ ……………⑤
また$\angle BAE=\angle DAF$
　$\angle BEA=\angle DFA=\angle R$
より　$\angle ABE=\angle ADF$ …………②
また①より$\angle ADF=\angle GDF$
同様に　$\angle ABE=\angle HBE$ 　…③
より　$\angle ABH=\angle ADG$
平行四辺形の性質より
　$\angle ABC=\angle ADC$
よって　$\angle CHB=\angle GCD$
④，⑤，⑥より
　$\triangle BCH\equiv\triangle DGC$
よって　$CH=GC$
よって　$IC\perp HG$（おわり）
　　これはいただけない。

A，GはDFに関して対称
$\therefore AD=GD$

同様にして
$AB=HB$

$BC=AD=DG$
同様に
$HB=AB=CD$

また二等辺三角形
BAHとDAGに於いて
$\angle BAD=\angle DAG$
$\therefore \angle ABH=\angle ADG$

これは
$\angle CBH=\angle GDC$
の書きまちがいらしい

二等辺三角形の頂点を通る直線は何でも底辺に垂直なわけはない。多分これはCIが$\angle GCH$の二等分線とでも予断したのでないかと思われる。これはしかしこの答案の前後からT君の実力がわかった上での善意の解釈であって，冷めたい目で見ればゴマ化しとうけとれない事もない危険な答案である。

単に　$CH=GC$　　$\therefore IC\perp GC$
では説明不足である。

問題2にさかのぼって　$IH=IG$から
　$\triangle IHC\equiv\triangle IGC$
$\therefore \angle ICH=\angle ICG$
位の説明がぜひ必要です。

この様に答案作製の途中で簡明か，詳説かの分岐点に立った時，どちらがBetterか判断に迷った時は，簡明を犠牲にしても詳細な説明をした方がいいでしょう。

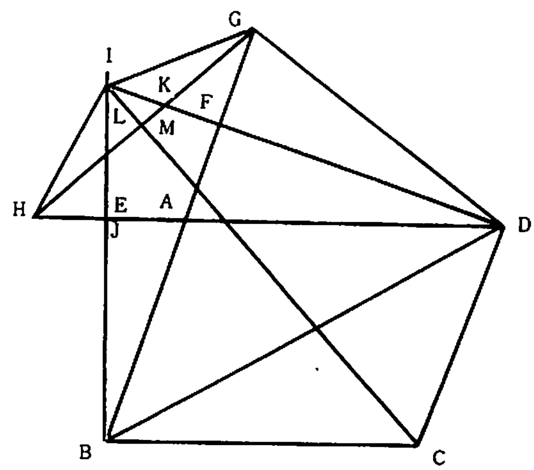
以上採点中に感じた事を思いつくままにのべてみました。御参考になれば幸いです。

4．解答例

満点の答案です。

第2問

Eに対しAとHが対称なので　$IH=IA$
Fに対しAとGが対称なので　$IG=IA$



$\therefore IH=IG$
$\therefore \triangle IHG$は二等辺三角形
　$\therefore \angle IHG=\angle IGH$

第3問

四角形IEAFで
　$\angle IEA=\angle IFA=90°$なので
向かいあう角の和が180°になる
$\therefore$四角形IEAFは円に内接する
$\therefore \angle EIF+\angle EAF=180°$
$\angle EAF=\angle BAD=\angle BCD$なので
$\angle EIF+\angle BCD=180°$
$\therefore$四角形IBCDも円に内接する
$\therefore$弦CDに対する円周角なので
　$\angle DIC=\angle DBC$

第4問

$\triangle HBA$は$BH=BA$の二等辺三角形
$\triangle ADG$は$DA=DG$の二等辺三角形
また$\angle HAB=\angle GAD$なのでこの2つの三角形は
　相似　　$\therefore \angle HBA=\angle ADG$
$\therefore$四角形HBDGで$\angle HBG=\angle HDG$なので
　この四角形は円に内接する
　$\therefore \angle HGB=\angle HDB$
　また$\angle HDB=\angle CBD$なので
　　$\angle HGD=\angle DBC$

第５問

△GKFと△IKMで

(4)より∠MIK＝∠FGK

また∠IKM＝∠GKF　∴△GKF∽△IKM

∴∠IMK＝∠GFK＝90°

∴IC⊥HG

また△IHMと△IGMで

∠IMH＝∠IMG＝90°

HI＝GI，IMは共通

∴△IHM≡△IGM

∴HM＝MG

3

日本の参議院選挙は比例代表区と地方区に分けて選挙がおこなわれる。比例代表区の議員定数は50議席であり，投票では有権者が政党名を記入する。投票結果にもとづく各党の配分議席数はドント方式によって決定され，各政党があらかじめ順位をつけて提出しておいた候補者のリストから当選議員が選ばれる。

この問題では，ドント方式による各政党の獲得議席数について考えてみる。

ドント方式を説明する前に記号を次のように定義しよう。立候補した政党がA，B，Cの３つだけだったとしよう。

投票総数（有効投票数）……N

A党の得票数……$n(\mathrm{A})$

A党の得票率……$f(\mathrm{A})=\dfrac{n(\mathrm{A})}{N}$

B党の得票数……$n(\mathrm{B})$

B党の得票率……$f(\mathrm{B})=\dfrac{n(\mathrm{B})}{N}$

C党の得票数……$n(\mathrm{C})$

C党の得票率……$f(\mathrm{C})=\dfrac{n(\mathrm{C})}{N}$

選挙で争う議員定数（総議席数）……M

A党の議席数……$m(\mathrm{A})$

A党の議席率……$g(\mathrm{A})=\dfrac{m(\mathrm{A})}{M}$

B党の議席数……$m(\mathrm{B})$

B党の議席率……$g(\mathrm{B})=\dfrac{m(\mathrm{B})}{M}$

C党の議席数……$m(\mathrm{C})$

C党の議席率……$g(\mathrm{C})=\dfrac{m(\mathrm{C})}{M}$

このようにおくと，

$n(\mathrm{A})+n(\mathrm{B})+n(\mathrm{C})=N$,

$f(\mathrm{A})+f(\mathrm{B})+f(\mathrm{C})=1$

$m(\mathrm{A})+m(\mathrm{B})+m(\mathrm{C})=M$,

$g(\mathrm{A})+g(\mathrm{B})+g(\mathrm{C})=1$

が成立する。

たとえば，$N=5000$，$n(\mathrm{A})=2800$，$n(\mathrm{B})=1600$，$n(\mathrm{C})=600$，$M=10$のとき，ドント方式によると，各政党の議席数$m(\mathrm{A})$，$m(\mathrm{B})$，$m(\mathrm{C})$を次のように決める。

① $n(\mathrm{A})$，$n(\mathrm{B})$，$n(\mathrm{C})$のおのおのを１，２，３……でそれぞれ割って表１をつくる。

② 表１にあらわれた数の大きい順に順位をつけていく。（表１では小数点以下を切り捨ててかいてあるが，大小の比較は小数点以下も含めておこなう）

③ M番目で②の作業をうちきり，各政党の横にある順位のついている数の個数を議席数と決める。

例では$M=10$だから，$m(\mathrm{A})=6$，$m(\mathrm{B})=3$，$m(\mathrm{C})=1$となる。なおこのときの各政党の得票率は，$f(\mathrm{A})=0.56$，$f(\mathrm{B})=0.32$，$f(\mathrm{C})=0.12$

議席率は，$g(\mathrm{A})=0.6$，$g(\mathrm{B})=0.3$，$g(\mathrm{C})=0.1$となる。

いまの例で議員定数Mが，$M=11$だった場合，表１の数で11番目の数が複数あるので$m(\mathrm{A})$，$m(\mathrm{B})$，$m(\mathrm{C})$をうまく決めることができない。この問題では，M議席目が同順のためうまく決められないような場合を除いて考える。

表１

	÷1	÷2	÷3	÷4	÷5	÷6	÷7
A党	①2800	③1400	④ 933	⑥ 700	⑧ 560	⑩ 466	400
B党	②1600	⑤ 800	⑨ 533	400	320	266	228
C党	⑦ 600	300	200	150	120	100	85

以上の記号およびドント方式は立候補した政党の数がどんな場合でも同じように適用することができる。

ドント方式に関する次の(1)~(4)に答えなさい。なお，(2)，(4)については立候補した政党の得票数はいずれも０でないと仮定する。

(1) 立候補した政党がA，B，Cの３つだけで，$N=6000$，$n(\mathrm{A})=3000$，$n(\mathrm{B})=1800$，$n(\mathrm{C})=1200$，$M=7$のとき，表１にあたる表をつくり，$m(\mathrm{A})$と$m(\mathrm{C})$を求めなさい。（ヒント：$m(\mathrm{B})=2$である）

(2) 立候補した政党がA，Bの２つだけで，$N=2000$，$M=15$のとき，$f(\mathrm{A})=g(\mathrm{A})$かつ$f(\mathrm{B})=g(\mathrm{B})$を満たす自然数$n(\mathrm{A})$をすべて求めなさい。

(3) $f(\mathrm{A})\geqq\dfrac{1}{M}$ならば，立候補した政党の数や得票数，議員定数にかかわらず，$m(\mathrm{A})\geqq 1$であることを証明しなさい。

(4) 立候補した政党がA，Bの２つだけである

と仮定する。$\frac{n(\mathrm{A})}{n(\mathrm{B})}=k$ とおいたとき k が自然数であって，なおかつ $M+1$ が $k+1$ で割りきれないとき，

$$f(\mathrm{A}) \leqq g(\mathrm{A}) \text{かつ} f(\mathrm{B}) \geqq g(\mathrm{B})$$

であることを証明しなさい。また，上の不等式の等号が成りたつための必要十分条件を求めなさい。

講　評

問題文があまりに長いのと，数学の問題らしからぬ分野で面食らった人もいたかもしれない。配点は(1)(2)(3)(4)それぞれ10点ずつとした。(1)(2)では細かい部分点の基準をつくりそれにそって採点したが，(3)(4)は証明するみちすじがわかるような記述がされているかどうかで個々に判断した。(1)，(2)の正答率はそれぞれ79%，24%であった。(1)はドント式（ドント方式というよりこちらのいい方が普通のようである）のやり方に慣れてもらうためのもので，長い問題文もこのやり方を理解してもらうためのものであった。(2)は $n(\mathrm{A})$ が自然数であって400の倍数であることがわかればほぼ解ける。問題文の「立候補した政党の得票数はいずれも0でない」という条件を入れるのを(うっかり)忘れて $n(\mathrm{A})=0$ または2000を答に含めてしまった者は全体の12%，30人いた。あまり「ひっかけ」問題にするつもりではなかったが，結果的にそうなってしまい反省している。この問題では $m(\mathrm{A})$ に1から順に数を入れたり，「過剰」な条件からたくさんの式を同値反復する洗練されていない解答があった。一般的にはもっと簡潔にかくべきなのかもしれないが，出題者はこのような解答は大変気に入っているし，良い解答でもあると考えている。解答用紙にかかれている過程にそって「なるほど」とうなずきながら，解答者のあとをついていくと，こせこせした定型的な「模範解答」にはない豊かさが感じられる。

出題者の予想どおり，ほとんどの者は(3)以降を解答できなかった。(3)がほぼ正答であったのは，札幌北の伊山修，札幌南の伊藤洋樹，旭川東の佐藤和暁，(4)がほぼ正答であったのは，札幌南の橋本和歌子，(3)(4)の両方がほぼ正答であったのは，札幌北の島尚亮，旭川東の谷口智之の諸氏であった。他にもだいたいわかっているような者がいたのだが，解答を何回みても証明を追っていくことができなかった。それに対して上記の者の解答には細かい部分に飛躍や不十分な点があるものの，証明の方針やアイディア，概略がわかりやすく簡潔に説明されていた。限られた時間内で(3)以降を正しく答えた者には敬意を表したい。実は，出題者はとぎれとぎれではあるが何日も考えてやっと(4)の証明ができたのである。

図　1989年参議院選挙比例代表区における
各政党の得票率と議席シェア
(得票の多い10政党のみ)

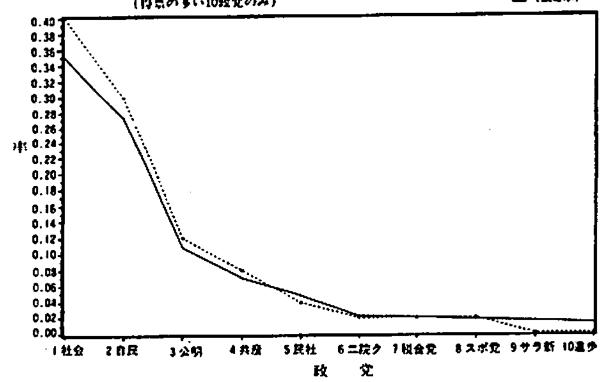


表　1989年参議院選挙比例代表区における政党別得票と議席

(得票の多い10政党のみ)

1989年7月23日投票

政党 A	得票数 $n(\mathrm{A})$	得票率 $f(\mathrm{A})$	議席数 $m(\mathrm{A})$	議席率 $g(\mathrm{A})$
1 社会	19,688,252	35.05%	20	40%
2 自民	15,343,455	27.32%	15	30%
3 公明	6,097,971	10.86%	6	12%
4 共産	3,954,408	7.04%	4	8%
5 民社	2,726,419	4.85%	2	4%
6 二院ク	1,250,022	2.23%	1	2%
7 税金党	1,179,939	2.10%	1	2%
8 スポ党	993,989	1.77%	1	2%
9 サラ新	872,326	1.55%	0	0%
10 進歩	711,980	1.27%	0	0%
議席をとれなかった政党の計	4,936,873	8.79%	0	0%
合計	56,171,328 N	100.00%	50 M	100%

去年（1989年）の参議院選挙比例代表区の政党別得票と議席は図と表のとおりである。問題(3)で証明したことは，参議院では2%の票を取れば議席を1つ以上確保できるということであり，図表もそのようになっている。しかしその逆が成立しない反例は，スポーツ新党である。2%が1議席にあたるから，1番得票の多かった社会党は得票率より議席を2議席多く得ているようにもみえる。以下自民党，公明党，共産党では得票率＜議席率（$f(\mathrm{A})<g(\mathrm{A})$）となっており，ドント式は大政党に有利にみえる。これは，2%の票をとれなかった小政党の票がその政党の議席にはならず(死票といいます)，死票が大政党にいくことによるようだ。ただ，ドイツにおけるヒトラーのナチスは，はじめ得票率が少なかったが議席を得たのが後の政権奪取を容易にしたという議

論もあるので，よくないと決めつけるわけにはいかない。

ところで，得票パターンから議席配分を決める方法には，さまざまな方法が考えられている。それらについては，ちょっと古いのだが西平重喜『比例代表制　国際比較のもとづく提案』（中広新書：1981年）が読みやすい。一方参議院地方区や衆議員選挙区，地方公共体の議員選挙では，選挙区による一票の格差が問題になっており，訴訟もおこなわれている。実はこれも問題の構造が同じなのである。参議院比例代表区では各政党の得票に比例した議席を配分する方法になるが，衆議院選挙区では各選挙区の人口に比例した議員定数を配分する方法（有権者数に比例した配分とどちらが公正なのかは議論する必要がある）となる。衆議院の議席定数の配分で説明したものとして，別冊・数理科学『現象にひそむ非線形』カオスの母（サイエンス社：1989年）の170～180ページにのっている茨木俊秀『議員定数の最適配分法』や，雑誌科学朝日1989年10月号90～96ページの加藤直喜他『一票の重みを平等にするには——数学からみた定数是正問題』がある。どちらも，良い定数配分法の持つ性質を定義し，いろいろな配分法がそれらの性質を持つかどうかを説明している。出題者の不勉強でまだ見ていないが，バリンスキー他著，越山康，一森哲男訳『公正な代表制——ワン・マン-ワン・ヴォートの実現を目指して——』（千倉書房：1987年）はこの問題をかなりくわしく論じているようである。どのような選挙の方法が最も「公正」なのかの数学による議論はフランス革命のころから特に盛んになった。アメリカの上院議員選挙区の議員定数の具体的な配分ルールは，数学者たちの議論やシミュレーションをもとに客観的に決めたそうである。日本においては選挙区への議員定数の配分法は，５年ごとの国勢調査によって更正することを例とすると公職選挙法にかいてあるだけで，具体的なルールは存在しない。諸君も，どんなルールで配分するのが良いのか数学で具体的に検討してみてはいかがだろう。

解答例

(1)

	÷1	÷2	÷3	÷4
A党	①3000	③1500	⑤1000	⑦ 750
B党	②1800	⑥ 900	600	450
C党	④1200	600	400	300

$$m(\mathrm{A})=4,\ m(\mathrm{C})=1$$

(2) $f(\mathrm{A})=g(\mathrm{A})$ より $\dfrac{n(\mathrm{A})}{N}=\dfrac{m(\mathrm{A})}{M}$……①

$N=2000$，$M=15$ を①に代入し，分母の最小公倍数（５×400×３）を両辺にかけると $3\cdot n(\mathrm{A})=400\cdot m(\mathrm{A})$

３と400は互いに素（最小公倍数が１）だから

$n(\mathrm{A})$ は400で割りきれる……②

$n(\mathrm{A})>0$，$n(\mathrm{B})>0$ より

$0<n(\mathrm{A})<2000$……③

②③より $n(\mathrm{A})=400,\ 800,\ 1200,\ 1600$，これらのそれぞれに対して $f(\mathrm{B})=g(\mathrm{B})$ が成立するから（あるいは $f(\mathrm{B})=1-f(\mathrm{A})$，$g(\mathrm{B})=1-g(\mathrm{A})$ から）

答：$n(\mathrm{A})=400,\ 800,\ 1200,\ 1600$

(3) $m(\mathrm{A})<1$ であると仮定して矛盾をみちびく。

議席を獲得した政党を B_1，B_2……B_t とおくと

$m(\mathrm{B}_1)+m(\mathrm{B}_2)+\cdots\cdots+m(\mathrm{B}_t)=M$……④

表１にあらわれた数について

$\dfrac{n(\mathrm{B}_1)}{m(\mathrm{B}_1)}>n(\mathrm{A})$ より $n(\mathrm{B}_1)>m(\mathrm{B}_1)\cdot n(\mathrm{A})$

$\dfrac{n(\mathrm{B}_2)}{m(\mathrm{B}_2)}>n(\mathrm{A})$ より $n(\mathrm{B}_2)>m(\mathrm{B}_2)\cdot n(\mathrm{A})$

………………………………………………

$\dfrac{n(\mathrm{B}_t)}{m(\mathrm{B}_t)}>n(\mathrm{A})$ より $n(\mathrm{B}_t)>m(\mathrm{B}_t)\cdot n(\mathrm{A})$

右側の不等式の左辺と右辺とを加えて大小関係を考慮すると

$$n(\mathrm{B}_1)+n(\mathrm{B}_2)+\cdots+n(\mathrm{B}_t)>\{m(\mathrm{B}_1)+m(\mathrm{B}_2)+\cdots+m(\mathrm{B}_t)\}\cdot n(\mathrm{A})$$

④と $N\geqq n(\mathrm{B}_1)+n(\mathrm{B}_2)+\cdots+n(\mathrm{B}_t)$ をつかうと $N>M\cdot n(\mathrm{A})$ となる。これより，$\frac{1}{M}>\frac{n(\mathrm{A})}{N}=f(\mathrm{A})$ がみちびかれ，題意と矛盾する。よって $m(\mathrm{A})\geqq 1$ であることが証明された。

4

関数 $f(x)$，$g(x)$ はすべての実数 x で定義された実数値をとる関数である。また，関数 $F(x)$ を $F(x)=f(x)+g(x)i$（i：虚数単位）と定義する。これらの関数は，すべての実数 x，y に対して，次の２つの条件(I)，(II)を満たしている。

(I)　$F(x+y)=F(x)F(y)$

(II)　$\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2=k$（k は正の定数）

次の問に答えよ。

(1)　すべての実数 x に対して，$F(x)\neq 0$ であることを示せ。

(2)　$F(0)$ の値を求めて，さらに $f(0)$，$g(0)$，k の値を求めよ

(3)　$f(x+y)$，$g(x+y)$ を $f(x)$，$g(x)$，$f(y)$，

$g(y)$で表せ。
(4) $f(-x)=f(x)$, $g(-x)=-g(x)$を示せ。
(5) $F(x-y)=\dfrac{F(x)}{F(y)}$を示せ。

講 評

このような抽象的な関数の問題，複素数がでてくる問題は生徒にとって大変考えにくい問題であったようです。40点満点をとったのは，伊山修君(札北)，東藤正樹君(旭丘)，山田浩君(札南)，吉井彰規(岩見沢東)の4名でした。

答案のなかに，$f(x+y)=f(x)f(y)-g(x)g(y)$, $g(x-y)=g(x)f(y)+f(x)g(y)$, $\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2=1$, $f(0)=1$, $g(0)=0$などの条件より，$f(x)=\cos x$, $g(x)=\sin x$として，議論をすすめる生徒もいましたが，こういう問題では，$f(x)$, $g(x)$のままで考えてください。しかし，$f(x)=\cos x$, $g(x)=\sin x$に気がついたことは，大変すばらしいことです。

実際，$f(x)$, $g(x)$が微分可能で，$f(x+y)=f(x)f(y)-g(x)g(y)$, $g(x+y)=g(x)f(y)+f(x)g(y)$を満たすなら，$f(x)=a^x\cos bx$, $g(x)=a^x\sin bx$（ただし，$a>0$）が導けますが，高校の範囲外の微分方程式を解くことになります。

さらに，$\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2=1$より，$a=1$となり，$f(x)=\cos bx$, $g(x)=\sin bx$が分かります。

次に各設問については，(1)は半分ぐらいの生徒ができていました。なかには，説明不足で得点にならない生徒もかなりいました。やさしい問題ほど答案に注意してください。

(2)は，$x=y=0$を$F(x+y)=F(x)F(y)$に代入すると$F(0)=F(0)F(0)$,に気がついた生徒はだいたいできていたようです。こういう解法は関数方程式の問題でよくあることなのでおぼえておいてください。

(3)は$F(x+y)=F(x)F(y)$を$f(x)$, $g(x)$で表すとでてくる結果なので，もう少しできてほしかった問題です。

(4)は，設問のなかで一番むずかしい問題でした。完全にできた生徒は7名いました。その中で山田君（札南）の解答は，解答例と異なった解答をしていました。後で別解として載せておきます。

(5)が完全にできていたのは21名でした。答案はまちまちで，$F(x)=f(x)+g(x)i$になおした者，$F(x+y)=F(x)F(y)$を工夫した者などいました。そのなかで，一番上手に用いた答案は，$F(x)=F((x-y)+y)=F(x-y)F(y)$と変形して証明した生徒がいて，採点者として感激しました。

解答例

(1)
$F(x)=f(x)+g(x)i=0$となるxが存在するなら，
このxに対して，$f(x)=0$, $g(x)=0$となり，$k=0$
条件(II)より$\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2=k$は正の定数であることに反する。
よって，全ての実数xに対して$F(x)\neq 0$である。

(2)
$x=y=0$を，$F(x+y)=F(x)F(y)$に代入すると，
$F(0)=F(0)F(0)$
(1)より，$F(0)\neq 0$なので，$\underline{F(0)=1}$
関数$F(x)$の定義より，$F(0)=f(0)+g(0)i=1$
関数$f(x)$, $g(x)$は実数値をとる関数であることより，$\underline{f(0)=1,\ g(0)=0}$
条件(II)より，すべての実数xに対して$\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2=k$は定数となることから，
$k=\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2=\{f(0)\}^2+\{g(0)\}^2$
$=1^2+0^2=\underline{1}$

(3)
条件(I)より，
左辺$=F(x+y)$
$=f(x+y)+g(x+y)i$
右辺$=F(x)F(y)$
$=\{f(x)+g(x)i\}\{f(y)+g(y)i\}$
$=f(x)f(y)-g(x)g(y)$
$+\{f(x)g(y)+g(x)f(y)\}i$
左辺と右辺の実部と虚部を比較すると，
$\underline{f(x+y)=f(x)f(y)-g(x)g(y),}$
$\underline{g(x+y)=f(x)g(y)+g(x)f(y)}$

(4)
(3)で求めた式に$y=-x$を代入すると，
$f(0)=f(x)f(-x)-g(x)g(-x)$
$g(0)=f(x)g(-x)+g(x)f(-x)$
(2)より，$f(0)=1$, $g(0)=0$なので
$f(x)f(-x)-g(x)g(-x)=1$ ……………………①
$f(x)g(-x)+g(x)f(-x)=0$ ……………………②
①$\times f(x)$＋②$\times g(x)$を計算すると，
$\{\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2\}f(-x)=f(x)$
(2)で求めた$\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2=1$より，
$f(-x)=f(x)$となる。
同様に②$\times f(x)$－①$\times g(x)$を計算すると，
$\{\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2\}g(-x)=-g(x)$
よって，$g(-x)=-g(x)$
（別解，山田浩君の解答より）
$F(0)=F(x-x)$
$=F(x)F(-x)$
$=\{f(x)+g(x)i\}\{f(-x)+g(-x)i\}$ ……(#)
ところで，$\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2=1$より

$\{f(x)+g(x)i\}\{f(x)-g(x)i\}=1$

ゆえに，$f(x)+g(x)i=\dfrac{1}{f(x)-g(x)i}$を(#)に代入すると，

$F(0)=\dfrac{f(-x)+g(-x)i}{f(x)-g(x)i}$

$F(0)=1$なので，

$1=\dfrac{f(-x)+g(-x)i}{f(x)-g(x)i}$

ゆえに，$f(x)-g(x)i=f(-x)+g(-x)i$

よって，実部，虚部を比較して，

$f(-x)=f(x)$，$g(-x)=-g(x)$となる。

(5)

左辺$=F(x-y)$

$=f(x-y)+g(x-y)i$

ここで，$f(x-y)=f(x+(-y))$

$=f(x)f(-y)-g(x)g(-y)$

$=f(x)f(y)-g(x)\{-g(y)\}$

$=f(x)f(y)+g(x)g(y)$

$g(x-y)=g(x+(-y))$

$=g(x)f(-y)+f(x)g(-y)$

$=g(x)f(y)+f(x)\{-g(y)\}$

$=g(x)f(y)-f(x)g(y)$

ゆえに，

左辺$=f(x)f(y)+g(x)g(y)+\{g(x)f(y)-f(x)g(y)\}i$

右辺$=\dfrac{F(x)}{F(y)}=\dfrac{f(x)+g(y)i}{f(y)+g(y)i}$

$=\dfrac{\{f(x)+g(x)i\}\{f(y)-g(y)i\}}{\{f(y)+g(y)i\}\{f(y)-g(y)i\}}$

$=\dfrac{f(x)f(y)+g(x)g(y)+\{g(x)f(y)-f(x)g(y)\}i}{f(y)^2+g(y)^2}$

$f(y)^2+g(y)^2=1$なので，

右辺$=f(x)f(y)+g(x)g(y)+\{g(x)f(y)-f(x)g(y)\}i$

ゆえに，左辺＝右辺

よって，$F(x-y)=\dfrac{F(x)}{F(y)}$

(別解)

$F(x)=F(x-y+y)$

$=F(x-y)F(y)$

よって，$F(x-y)=\dfrac{F(x)}{F(y)}$

追　記

この問題は$e^{ix}=\cos x+i\sin x$という公式（オイラーの公式とよばれている）をイメージして作成しました。オイラーの公式は高校の範囲外ですが，応用範囲が広く，重要な式なので是非おぼえてください。

5

問題5　k，l，m，nを自然数，p，qを相異なる奇数の素数とする。「nの正の約数すべての和が$2n$に等しい」とき，nを「完全数」という。

例　6の正の約数は1，2，3，6。$1+2+3+6=12=2\cdot6$だから6は完全数。以下の問いに答えよ。ただし，$(p-1)(1+p+p^2+\cdots+p^k)=p^{k+1}-1$より$1+p+p^2+\cdots+p^k=\dfrac{p^{k+1}-1}{p-1}$を用いてよい。

(1)　2数27，28が，それぞれ完全数であるかないかを調べよ。

(2)　$n=p^k$は完全数でないことを示せ。

(3)　$n=p^kq^l$は完全数でないことを示せ。

(4)　$n=3^k5^l7^m$は完全数でないことを示せ。

講　評

(1)　素直に，正の約数の和をとって比較すればよい。間違いとしては，約数すべてを挙げずに足している人，足し算を間違っている人，完全数でないのに〝完全数〟で終わっている人。二つで8点（各4点）。

(2)　p^kの約数は，$1, p, p^2, \cdots, p^k$。その和は，$\dfrac{p^{k+1}-1}{p-1}$。

完全数と仮定すると，$\dfrac{p^{k+1}-1}{p-1}=2p^k$。分母を払って，$p^{k+1}-2p^k+1=0$。ここまではよいが，$(p^k-1)^2=0$と変形した人(本当ですか？)，$k=1$，2といくつかの例だけ調べた人，$p^k(p-2)=-1$から，即$p=1$と結論付けた人。

正解の例として，〝$p\geqq3$，$k\geqq1$だから，$p^k(p-2)>0$〟で矛盾を導いた人，$1+p+\cdots+p^k=2p^k$から，$1=p(p^{k-1}-p^{k-2}-\cdots-1)$。右辺は$p$の倍数だから矛盾と結論付けた人もいます。8点。

(3)　この問題以降正解の数は極端に減りました。

$\dfrac{p^{k+1}-1}{p-1}\cdot\dfrac{q^{l+1}-1}{q-1}=2p^kq^l$。分母を払って整理すると，$p^{k+1}q^{l+1}-2p^{k+1}q^l-2p^kq^{l+1}+2p^kq^l+p^{k+1}+q^{l+1}-1=0$。

ここからすぐさま〝成立しない″と結論できるのでしょうか。

正解の例は，

$p^k q^l(pq-2p-2q+2)+p^{k+1}+q^{l+1}-1=0$

$p^k q^l\{(p-2)(q-2)-2\}+p^{k+1}+q^{l+1}-1=0$

$p<q$で，$p\geqq 3$，$q\geqq 5$としてよいから，

$(p-2)(q-2)\geqq 3$だから，

左辺$\geqq p^k q^l+p^{k+1}+q^{l+1}-1$。

勿論，$p^k q^l>1$，$p^{k+1}>1$，$q^{l+1}>1$だから，等式は不成立。故に，矛盾。式の変形および評価をしなければなりませんが，きちんと証明した人がいます。

札東の内海君（2年），札北の伊山君（2年），潮陵の近藤君（2年）。12点。

(4) 正解者は，札北の伊山君（2年）のただ1人。

証明の概略は，$\dfrac{3^{k+1}-1}{2}\cdot\dfrac{5^{l+1}-1}{4}\cdot\dfrac{7^{m+1}-1}{6}=2\cdot 3^k 5^l 7^m$。

よって，$(3^{k+1}-1)(5^{l+1}-1)(7^{m+1}-1)$

$=2^5\cdot 3^{k+1}\cdot 5^l\cdot 7^m$ ………①

$m\geqq 1$より，$7^{m+1}-1$は7の倍数でないから，$3^{k+1}-1$または$5^{l+1}-1$は7で割り切れる。ところで，3^a-1が7で割り切れるのは，aが6の倍数のときに限ることを示し，また，5^b-1が7で割り切れるのも，bが6の倍数に限ることから，3^a-1が7で割り切れるときは，$3^a-1=(3^6-1)\cdot M=728M=2^3\cdot 7\cdot 13M$であるし，$5^b-1$が7で割り切れるときは，$5^b-1=(5^6-1)\cdot N=15624N=2^3\cdot 3^2\cdot 7\cdot 31N$となる。ところが①の右辺は13，31なる素因数を持たないから，①は不成立。矛盾。配点12点としたが，高すぎたかもしれない。

全体を通して，計算が不正確であり，式変形の途中から，直ぐさま結論に飛んでしまう。大変危険なことです。設問が間違っていても正しいと早合点してしまいそうですね。また，数学を深く研究している人は問題の正否が分らないものを解いています。そんな時，計算や推論が間違っては大変です。綿密な配慮を忘れないようにしたいものです。

また，(2)以降を解くにあたって，(2)を一般性のある解法で解く能力も養って下さい。

例えば，素因数の個数が増えて，5個になったらどうでしょう。$n=p^k q^l r^m s^u t^v$なら，

$$\frac{p^{k+1}-1}{p-1}\cdot\frac{q^{l+1}-1}{q-1}\cdot\frac{r^{m+1}-1}{r-1}\cdot\frac{s^{u+1}-1}{s-1}\cdot\frac{t^{v+1}-1}{t-1}=2p^k q^l r^m s^u t^v。$$

分母を払って，整理しても皆目見当がつきません。そこで，分母を払った後，両辺を$p^{k+1}q^{l+1}r^{m+1}s^{u+1}t^{v+1}$で割って，

$$\left(1-\frac{1}{p^{k+1}}\right)\left(1-\frac{1}{q^{l+1}}\right)\left(1-\frac{1}{r^{m+1}}\right)\left(1-\frac{1}{s^{u+1}}\right)\left(1-\frac{1}{t^{v+1}}\right)$$
$$=2\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{q}\right)\left(1-\frac{1}{r}\right)\left(1-\frac{1}{s}\right)\left(1-\frac{1}{t}\right)$$

と変形するか，

$$\frac{1-\frac{1}{p^{k+1}}}{1-\frac{1}{p}}\cdot\frac{1-\frac{1}{q^{l+1}}}{1-\frac{1}{q}}\cdot\frac{1-\frac{1}{r^{m+1}}}{1-\frac{1}{r}}\cdot\frac{1-\frac{1}{s^{u+1}}}{1-\frac{1}{s}}\cdot\frac{1-\frac{1}{t^{v+1}}}{1-\frac{1}{t}}=2$$

などのように変形することによって見易くなるでしょう。

問題を考える時は，常に問題の本質に迫ろうとする努力（一般性はないかなど）と他の問題の中にヒントは隠されていないかなどと探ることが大切です。

「解答と解説」にも触れましたが，この問題は一般には未解決な問題です。

〝自然数において，自分自身以外の約数の和が自分自身に一致するものを<u>完全数</u>という。″

問題「奇数の完全数は存在するか？」

解答例

(1) 27の正の約数は，1，3，9，27。

よって，$1+3+9+27=40\neq 2\cdot 27=54$。

∴27は完全数ではない。

28の正の約数は，1，2，4，7，14，28。

よって，$1+2+4+7+14+28=56=2\cdot 28$

∴28は完全数である。

(2) $n=p^k$が完全数であると仮定する。

p^kの正の約数は，1，p，p^2，…，p^kだから，

$1+p+p^2+\cdots+p^k=\dfrac{p^{k+1}-1}{p-1}=2p^k$。

$p^{k+1}-1=2p^k(p-1)$。両辺をp^{k+1}で割ると，

$\therefore 1-\dfrac{1}{p^{k+1}}=2\left(1-\dfrac{1}{p}\right)$ ………………………………①

①の左辺<1。$p\geqq 3$だから，$2\left(1-\dfrac{1}{p}\right)\geqq 2\left(1-\dfrac{1}{3}\right)$

よって，①の右辺$\geqq\dfrac{4}{3}>1$。①は不成立。

故に，$n=p^k$は完全数ではない。

〔素因数1個の奇数は完全数でない〕

(3) $n=p^k q^l$ $(p<q)$ が完全数と仮定する。

nの正の約数は，1，p，p^2，…，p^k，q，pq，p^2q，…，p^kq，q^2，pq^2，…，p^kq^2，…，q^l，pq^l，…，$p^{k+1}q^{l+1}$。

総和は，$(1+p+p^2+\cdots+p^k)(1+q+q^2+\cdots+q^l)$

$=\dfrac{p^{k+1}-1}{p-1}\cdot\dfrac{q^{l+1}-1}{q-1}$。

よって，$\dfrac{p^{k+1}-1}{p-1}\cdot\dfrac{q^{l+1}-1}{q-1}=2p^kq^l$

分母を払い，両辺を$P^{k+1}q^{l+1}$で割ると，

$(1-\dfrac{1}{p^{k+1}})(1-\dfrac{1}{q^{l+1}})=2(1-\dfrac{1}{p})(1-\dfrac{1}{q})$ …②

勿論，$p\geqq 3$，$q\geqq 5$としてよい。

②の左辺<1，一方，②の右辺$\geqq 2(1-\dfrac{1}{3})(1-\dfrac{1}{5})$。

よって，②の右辺$\geqq\dfrac{16}{15}>1$。②の等式は不成立。

故に，$n=p^kq^l$は完全数ではない。

〔素因数2個の奇数は完全数ではない。〕

(4)　$n=3^k5^l7^m$が完全数と仮定する。

(3)と同様に，

$\dfrac{3^{k+1}-1}{3-1}\cdot\dfrac{5^{l+1}-1}{5-1}\cdot\dfrac{7^{m+1}-1}{7-1}=2\cdot 3^k5^l7^m$

$$\therefore(1-\frac{1}{3^{k+1}})(1-\frac{1}{5^{l+1}})(1-\frac{1}{7^{m+1}})=2(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5})(1-\frac{1}{7})$$

故に，

$$(1-\frac{1}{3^{k+1}})(1-\frac{1}{5^{l+1}})(1-\frac{1}{7^{m+1}})=\frac{2\cdot2\cdot4\cdot6}{3\cdot5\cdot7}=\frac{2^5}{5\cdot7}\cdots\cdots③$$

$$=\frac{32}{35}<1\ \text{（可能性あり）。}$$

③において，k，l，mについて調べる他ない。

$l\geqq 1$，$m\geqq 1$より

③の左辺$\geqq(1-\dfrac{1}{3^{k+1}})\cdot\dfrac{24}{25}\cdot\dfrac{48}{49}\leqq\dfrac{32}{35}$

よって，$1-\dfrac{1}{3^{k+1}}\leqq\dfrac{32}{35}\cdot\dfrac{25}{24}\cdot\dfrac{49}{48}=\dfrac{35}{36}$

$3^{k+1}\leqq 36$。故に，$k=1$，2。

$k=1$のとき，

③は，$(1-\dfrac{1}{5^{l+1}})(1-\dfrac{1}{7^{m+1}})=\dfrac{36}{35}$（不成立）

$k=2$のとき，

$$(1-\frac{1}{5^{l+1}})(1-\frac{1}{7^{m+1}})=\frac{2^4\cdot3^3}{5\cdot7\cdot13}$$

左辺の分母に，素因数13はないので③は不成立。

よって，$n=3^k5^l7^m$は完全数でない。

総　論

実際に，(4)は，$n=p^kq^lr^m$に対しても証明（完全数でないことを）できますが，素因数の個数を増やして証明を試みて下さい。パソコンで解決するのもおもしろいですね。是非試してみて下さい。

参考までに，

$$(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5})(1-\frac{1}{7})(1-\frac{1}{11})\cdots(1-\frac{1}{\text{奇素数}})\cdots$$

は，∞（無限大）に発散します。

また，$(1-\dfrac{1}{3^2})(1-\dfrac{1}{5^2})\cdots(1-\dfrac{1}{(\text{奇素数})^2})\cdots$（積）

は収束します。

※これは，素数分布の理論に関係します。もし興味があれば，札平岸　古川まで。

担　当　委　員

井　原　　　鏧	中　田　保　之
小笠原　英　俊	永　渕　敬　二
河　野　章　二	成　田　雅　博
坂　下　正　雄	林　　　重　一
佐々木　光　憲	古　川　政　春
鈴　木　雅　博	皆　川　一　雄
中　居　基　昭	湊　川　三　竿
長　尾　　　章	大　和　達　也