代数解析研究会での勉強会について

1．はじめに

高等学校の数学の内容をより高く深い立場から理解することは，数学全体での位置づけや他の事項との関連を認識し，いかに教えるかを意識することにもつながり，教材研究を深めることになると考えられる．また，大学入試問題について検討する際にも現代数学の理論の特殊な場合が入試問題になっていることもあり興味深い．

このことから北数教高校部会研究部代数解析研究会の月例研究会では，おもに高等学校の数学科教員が集まって現代数学に関する本を輪読し，その周辺の話題を研究している．

現在は関数解析の入門的な内容について研究している．OB 会員である関口隆先生を講師として主に竹之内脩「函数解析」（朝倉書店）を読んで勉強会を開催している．

2．勉強会で学んでいる内容（おはなし編）

高校の数学 C で行列を学習し，大学に入ってからは線型代数学を学習する．

高校で平面の幾何ベクトルや空間の幾何ベクトルを学んだ．また，幾何ベクトルを成分表示したが，それを一般化して$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$のように横（または縦）に数を並べてできるものも考えられる．ここで各$a_1, a_2, \cdots, a_n$は実数であってもいいし，複素数でもよい．このようなものをn次元数ベクトルという．さらにこれらを一般化して加法・スカラー倍という演算を入れ，線形空間（ベクトル空間）と呼ばれるものが考えられる．

幾何ベクトルで内積を考えたが，線形空間に対しても内積を考えることができ，その内積が「ノルムからきまる距離に関して完備である」という小難しい（？）条件をみたすものをヒルベルト空間という．ヒルベルト空間は無限次元の場合を主に扱うので難しいがおもしろい．

そして線型作用素とは行列の表す 1 次変換のようなものである．1 次変換には行列で表したら対称行列になるようなもの，回転のようにベクトルの長さを変えないようなものなどさまざまなものがある．これらを一般化したものをそれぞれエルミット作用素，ユニタリ作用素という．また，1 次変換には例えばあるベクトルに対してそれを原点を通るある直線に垂直に写した影のベクトル（正射影ベクトル）に対応させるようなものがある．この 1 次変換をPとすると，Pは$P^2 = P$となる性質があり，射影子と呼んでいる．このような変換を一般化したものに射影作用素がある．

大学の線型代数学で，対称行列Aに対して射影子$P_1, P_2, \cdots, P_n$を用いて

$$A = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \cdots + \lambda_n P_n \qquad (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \text{ は } A \text{ の固有値})$$

とあらわされるということを学んだと思う．このような表し方を行列Aのスペクトル分解といった．これと同じようなことがヒルベルト空間上のエルミット作用素Aに対しても成り立つ．無限次元ヒルベルト空間になると固有値はスペクトルと呼ばれるより広い概念になり，右辺（射影作用素の無限和）はある特殊な積分の形で表される．これをエルミート作用素Aのスペクトル分解という．また，ユニタリ作用素についてもスペクトル分解で表すことができる．

3．勉強会で学んでいる内容（ちょっとハード編）

定義 3.1（射影作用素） Pがヒルベルト空間H上の<u>射影作用素</u>であるとは

(1) $P^2 = P$ （冪等）

(2) $P^* = P$ （エルミット）

であることをいう．

定義 3.2（スペクトル族） ヒルベルト空間Hにおいて，各実数λに対して射影作用素$E(\lambda)$が定義されていて，射影作用素の族$\{E(\lambda) : -\infty < \lambda < \infty\}$が

(1) $\lambda < \lambda' \Rightarrow E(\lambda) \le E(\lambda')$ （すなわち$\|E(\lambda)x\| \le \|E(\lambda')x\| \quad (x \in H)$）

(2) $E(-\infty) = O, E(\infty) = I$

(3) $E(\lambda + 0) = E(\lambda)$ （$-\infty < \lambda < \infty$）

をみたすとき，<u>スペクトル族</u>という．

このようなスペクトル族$\{E(\lambda) : -\infty < \lambda < \infty\}$と，連続関数$\phi : [\alpha, \beta] \to C$，及び$x \in H$に対してスティルチェス積分と同じようにして積分

$$\int_\alpha^\beta \phi(\lambda) dE(\lambda) x$$

が定義できる．ここで，この積分値はHの元である．

そこで，$x \in H$に対して$\int_\alpha^\beta \phi(\lambda) dE(\lambda) x \in H$を対応させる作用素を

$$\int_\alpha^\beta \phi(\lambda) dE(\lambda)$$

で表す．

命題 3.3　(1) $\int_{\alpha}^{\beta}\phi(\lambda)dE(\lambda)$ は H 上の有界線型作用素である.

(2) $\left\|\int_{\alpha}^{\beta}\phi(\lambda)dE(\lambda)x\right\|^2=\int_{\alpha}^{\beta}|\phi(\lambda)|^2 d\|E(\lambda)x\|^2$ が成り立つ.

(3) ϕ が実数値関数ならば $\int_{\alpha}^{\beta}\phi(\lambda)dE(\lambda)$ はエルミット作用素である.

(4) $|\phi(\lambda)|=1, E(\alpha)=O, E(\beta)=I$ ならば $\int_{\alpha}^{\beta}\phi(\lambda)dE(\lambda)$ はユニタリ作用素である.

定理 3.4（エルミット作用素のスペクトル分解）　ヒルベルト空間 H におけるエルミット作用素 A に対して，スペクトル族 $\{E(\lambda):-\infty<\lambda<\infty\}$ が存在して，

$$A=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda dE(\lambda)$$

と表すことができる．さらにこのようなスペクトル族 $\{E(\lambda):-\infty<\lambda<\infty\}$ は一意である.

定理 3.5（ユニタリ作用素のスペクトル分解）　ヒルベルト空間 H におけるユニタリ作用素 U に対して，スペクトル族 $\{E(\lambda):-\infty<\lambda<\infty\}$ が存在して，

$$U=\int_{0}^{2\pi}e^{i\lambda}dE(\lambda)$$

と表すことができる．さらにこのようなスペクトル族 $\{E(\lambda):-\infty<\lambda<\infty\}$ は一意である.

4. おわりに

本稿を読んでも何がなんだかさっぱりという方でも大丈夫である．未知のことを学ぶということは決して楽なことではない．しかしどのような難しい内容であってもきっと理解できるところがある．また，苦しみがあってこそ理解も深まり，納得したときの喜びが忘れられないものになるということを身をもって体験することができる．ぜひとも私たちの仲間になって一緒に勉強することを期待する.

（文責：札幌静修高等学校　杉本　幸司）