北海道算数数学教育会高等学校部会研究部数学教育実践研究会
第 125 回研究会 (2023 年 6 月 10 日) における講演

# 「幾何学と言えば三角形」は本当か？
の補足資料

古畑 仁（北海道大学大学院理学研究院数学部門）
https://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~furuhata/

幾何学といえば三角形などの図形を調べるというイメージをもちやすいけれど，実は「空間」そのものを対象とするような深化を遂げていることを，まずはお話ししたつもりです．

具体例として，有限集合上の正の確率分布全体の集合を空間としてとらえられることを考えました．この例で最初に空間とよんだものは，通常の数学用語にすると，Riemann 多様体 (可微分多様体と Riemann 計量の組) のことなので，簡単に Riemann 計量の説明をしました．Riemann 幾何学の基本的なアイディアは，Riemann 計量を用いて，この空間内の図形を測ったり，空間そのもののひずみを表現できるというものです．

続いて, その有限集合上の正の確率分布全体の集合には, 適切な Riemann 計量 (Fisher 計量とよばれました) が定まることを紹介しました．さらに，Riemann 計量以外にさらなる数学的な構造を導入するほうがよい，すなわち，いくつかの構造を導入して Riemann 計量の役割を分散させる幾何学もありうる，というアイディアを紹介しました．これが情報幾何学の一つの新しさ，面白さと思われます (統計学と独立した新しい幾何学としてのこの観点からの深化は今後の課題です)．最後に，N.N. Chentsov や甘利俊一，長岡浩司らによるいわゆる三平方の定理をお話しし，幾何学といえば三角形というところに戻ってきたことになります．講演題目の問いに対して，以前とは違う気持ちで Yes と言って頂ければ，講演は成功したことになるかもしれません．

$\star$

ここで，三平方の定理にでてきた「直線」について，少し補足をしておきましょう．$M$ を多様体とし，$c : (a, b) \to M$ を曲線 (点の運動) とします．時刻 $t \in (a, b)$ における $c$ の速度ベクトル $\dfrac{dc}{dt}(t)$ — だまされやすい記号ですが，ここでは深入りしないでおきましょう — は $T_{c(t)}M$ の元ですから，$\dfrac{dc}{dt}$ は，$M$ のベクトル場，正確には $M$ の $c$ に沿ったベクトル場と理解できます．もし，$\dfrac{dc}{dt}$ を $t$ で「微分」して “0” なら，速度ベクト

ルが変わらない，すなわち $c$ が等速直線運動をする，すなわち「まっすぐ」という概念が手に入るということになります．実は，ベクトル場を微分するという概念は，多様体の概念の中には備わっていません．そこで，(多様体に新たに Riemann 計量を据え付けたように，) 多様体にベクトル場を微分するための道具 (新しい概念) を付加する必要があります．ここでそれを $\nabla$ とかくことにすると，$c$ が 「まっすぐ」ということは，微分方程式

$$\nabla_{d/dt}\frac{dc}{dt} = 0$$

で表現できます．$\nabla$ をとりかえると「まっすぐ」という概念も変わることになります．上の式が成り立つことを，講演では， $c$ が 「$\nabla$-直線」であるとよびました (通常の数学用語でいうと，$c$ はアファイン接続 $\nabla$ に関する測地線である，と表現します)．

この辺りのことや本講演で触れた情報幾何学の基礎的な部分は，[1] およびそこに紹介されている文献をご覧ください．より本格的に調べるには，[2] を参考にするとよいでしょう．蛇足ながら，[4] の裏表紙裏が今日の話とつながっていることも付け加えておきたいと思います．幾何学のイメージが良い方向に拡がれば幸いです．

## 参考文献

[1] 藤岡敦，入門情報幾何—統計的モデルをひもとく微分幾何学—，共立出版，2021

[2] Fujiwara, A. Hommage to Chentsov's theorem. Info. Geo. (2022). https://doi.org/10.1007/s41884-022-00077-7

[3] 古畑仁，曲面—幾何学基礎講義—，数学書房，2013

[4] 数学みえる化プロジェクト・北海道大学総合博物館企画，正宗淳編，感じる数学 Tangible Math ～ガリレイからポアンカレまで～，共立出版，2022

[5] 数学みえる化プロジェクト： https://www.mathvis.org/