

令和5年度 北海道算数数学教育会 高等学校部会

AI時代の数学教育のあり方
～202〇年、ついにAIが教師を超える?～

名城大学 竹内英人 2023.8.26

竹内英人

元愛知県公立高校教員

現在 名城大学教職センター所属

未来の中高の数学の教員を目指す学生を指導



編集

たけちゃん先生

@takechan1414213

啓林館中高数学教科書執筆者 / 大学受験数学の参考書 FocusGold、ベネッセ重要問題演習 著者 | たけちゃん先生 | 数学好きの受験生と指導者に数学の情報を発信します | **瞬殺数学** | **選んで数楽** | 親子算数教室 | STEAM 算数 | 普段は大学で教えてます | 講演、出前講義、教員研修等のご依頼はDMから宜しくお願いします

📅 2021年9月から Twitter を利用しています

【自己紹介】



名城大学
教授

愛知県
算数、数学
教員研修
親子教室

日本の教育を元気にする

名城大学
教授 竹内 英人
HIDETO TAKEUCHI

SENSEI CARD 先生チップス!



愛あるお節介で公教育と私教育を結ぶ達人

名城大学
教授

竹内 英人 (たけちゃん先生)

1967.11.23生 千葉県出身 サッカー部
好きな作家: 喜多川 泰、ひすいこたろう

活動エリア 全国

活動内容 日本の教育を底上げるための教育サポート

提供価値 学校教育現場の活性化

先生人生成分グラフ

算数数学	サッカー	グルメ
出会い	学び	お裾分け活動

先生愛されメーター

自己採点 平均 7.50 / 10.00

熱血愛	7	寛かさ	6	厳しさ	7
フレンドリー	7	フットワーク	10	夢	8

45

お誘い歓迎

- 食事
- 悩み相談
- スイーツ会
- 勉強会
- ボランティア活動
- レクリエーション

こちらの先生へのお問合せは shachochips@esspride.com
社長チップス!の詳細はQRから!

SENSEI CARD 先生チップス!

先生チップス 会員募集中!

takesugak@gmail.com
竹内まで!

AIの影響を受けるリスクが高い職業TOP20

“

- 20位 臨床心理士・学校のカウンセラー
- 19位 教師 (図書館学)
- 18位 教師 (地理)
- 17位 裁判官・判事
- 16位 調停員・仲裁人
- 15位 教師 (文化研究)
- 14位 政治学者
- 13位 教師 (コミュニケーション)
- 12位 教師 (心理学)
- 11位 教師 (社会福祉)
- 10位 社会学者
- 9位 教師 (法的機関関連)
- 8位 教師 (政治学)
- 7位 教師 (社会学)
- 6位 教師 (哲学・宗教)
- 5位 教師 (法学)
- 4位 教師 (歴史)
- 3位 教師 (外国語・外国文学)
- 1位 テレマーケター

学校、塾、予備校は本当の意味での生き残りの時代



本物だけが生き残る時代

左の事実にとれただけの 教師が危機感を感じますか？

13

20 !

Pen Online 25 Pockets



教師が危険...? AIの影響を最も受ける職業TOP20が判明 | Pen Online

(学力の3要素)

①知識・技能

②思考力・判断力・表現力

③学びに向かう姿勢 (主体性を持って、多様な人々と協働して学ぶ態度)

① 定義・定理・公式の正しい理解、定石のマスター

② 自分の頭で考える、手を動かす、
ポイント、ミス、つまづきに対する 言語化

③ 数が苦から数楽へ ⇒ 楽しいが一番のモチベーション
数学不安から数学ファンへ

zero-shot つまり何の例もパターンも示さずにいきなり ChatGPT を教育や学習の文脈で活用する use case のリスト

1. **質問応答セッション**:

- 学生が疑問や質問を持った際、リアルタイムでの情報提供や説明を受けることができる。

2. **宿題のアシスタンス**:

- 学生が宿題の問題に取り組む際、ヒントやガイダンスを提供する。

3. **エッセイの校正**:

- 文法、綴り、文体のチェックや提案を行う。

4. **言語学習のサポート**:

- 言語の翻訳、発音ガイド、文法の質問応答など。

5. **トピックの深掘り**:

- 学生が特定のトピックや概念に関心を持った際、追加の情報や関連する資料を提供する。

6. **模擬テストの提供**:

- 特定のトピックや科目に関する模擬テストの質問を生成し、学生の理解度をチェックする。

7. **学習リソースの推薦**:

- 学生の興味や学習の進度に応じて、関連する書籍、記事、ウェブサイトなどの学習リソースを推薦する。

8. **ディスカッションのファシリテーション**:

- クラスのディスカッションやディベートの際、事実の確認や追加の情報を提供する。

9. **プログラミングのサポート**:

- コードのエラーの診断や、プログラミングに関する質問の回答。

10. **実験やプロジェクトのアイデア提供**:

- 科学の実験やクリエイティブなプロジェクトのアイデアを提供する。

11. **歴史や文化の深掘り**:

- 特定の歴史的イベントや文化に関する詳細な情報や背景を提供する。

12. **数学の問題解決のサポート**:

- 数学の問題の解法のヒントやステップバイステップのガイダンスを提供する。

(AI時代の正しい数学の学び方)

- ① 双方向型の対話を通して、「How型学習」から「Why型学習」へ
- ② 「解き方を覚える学習」から「考え方を理解する学習」へ（「丸暗記」から「理解暗記」へ）
- ③ 「数が苦」から「数楽」へ、「数学不安」から「数学ファン」へ

「答え（正解）を出すだけの学び」はAIに適わない

「分かりやすい、懇切丁寧なだけの授業」は、AIには適わない。

こうした状況において、我々ができることは、

「いかにして、『自身の頭で考える』生徒を育てるか」

「いかにして、生徒自身を『学びへの自立』に誘うことができるか」

の2つ

それを実現するためには

- ①徹底した教材研究（深い学びへの研究）
- ②コミュニケーション能力（対話を通じた「脳のアクティブラーニング」）
- ③プレゼン能力（ストーリー性）

（共通テストにおける、3つの「ゆう」）

- ① 「誘導」の「ゆう」
- ② 「融合」の「ゆう」
- ③ 「有名」の「ゆう」

【高校生への質問シリーズ】

高校生の皆さん、教えてください

$$\sum k^2 = n(n+1)(2n+1)/6$$

この公式の導出について、学校でどの程度習いましたか？

- 習わなかった (公式を覚えるだけで良いと言われた) 36%
- 習ったけど、自分で導けなくても良いと言われた 28%
- 自分でも導けるように言われた 25%
- 色んな導き方を教えてくれた 11%

268 票 · 最終結果

🗨️ 2 🔄 1 ❤️ 8 📊 3488 📌

たけちゃん先生 @takechan1414213 · 2日

(508 票) ...

【中高生の皆さんに質問】

二次方程式の解の公式

この導出はどの程度習いましたか？

- 習わない (公式を覚えれば良いと言われた) 21%
- 一応説明してくれた (導けなくても良いと言われた) 39%
- 丁寧に説明してくれた (自分で導けるように言われた) 29%
- 色んな周辺事項まで教えてくれた 11%

学校の先生方が
どの位「Why?」に
こだわっているか？

(たけちゃん先生の
Twitterより)

(今話題の、GPT-4の『暗記仮面が数学学習の敵であるとされるのはなぜ?』への返答)

数理哲人のFB記事から引用 (数理哲人には掲載について「快諾」頂きました)

(ChatGTP4の回答)

1. 理解の欠如：

暗記によって公式や解法を覚えるだけでは、数学の背後にある概念や理論の理解が不十分になります。これにより、数学的な思考力が育ちにくくなります。

2. 応用力の低下：

過度な暗記に頼ると、学んだ知識や技術を新しい問題や他の分野に応用する能力が低下します。数学は、さまざまな状況で応用できる論理的思考力を育てることが目的の一つですが、暗記に頼ることでその目的が達成されません。

3. 柔軟性の欠如：

単に公式や解法を暗記することに焦点を当てると、新しい問題や異なる状況に適応する能力が低下します。数学的な思考力は、さまざまな問題に対応できる柔軟性を持つことが重要です。

4. モチベーションの低下：

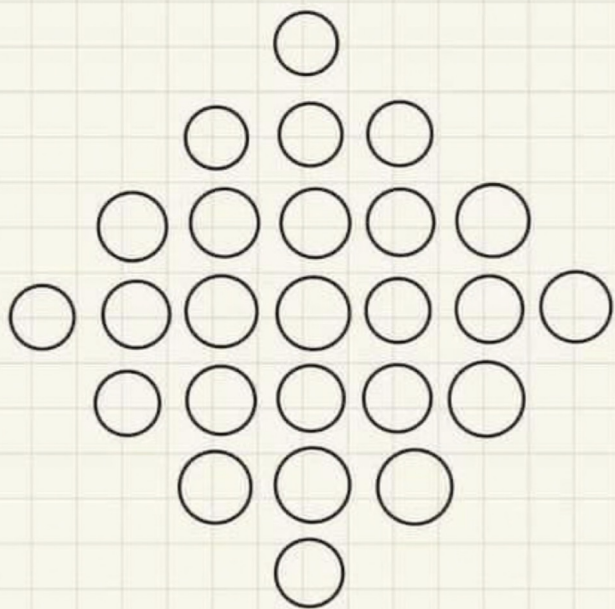
過度な暗記による学習は、生徒にとって単調で退屈に感じられることがあります。

これにより、数学に対する興味やモチベーションが低下し、学習効果が低くなります。

【Chat Gpt に聞いてみる】

下の図で○の数を求めなさい

(色々な方法で考えなさい)



・ Chat GPTはどんな答を
言っているか

・ 小学生と比べて、と55が
すぐれた解答を出しているか?

・ 先生方からこの教材をどう評価するか?



SH

あなたは次の問題の丸の個数の合計について、その数え方を様々提案してください。1つ1つの提案はいろんな見方・考え方にもとづいて出してください。また、複数の数え方どうしはあまり類似しないようにしてください。

問題

平面上に同じ形の丸が次のように並んでいます。【1】から【4】の丸の個数を求めよ。

【1】：7個横一列に並んでいます。

【2】：【1】の上下にそれぞれ5個横一列に並んでいます。

【3】：【2】の上下にそれぞれ3個横一列に並んでいます。

【4】：【3】の上下にそれぞれ1個あります。

なお、【1】からみると【2】【3】【4】はピラミッド型に見えるように並んでいます。

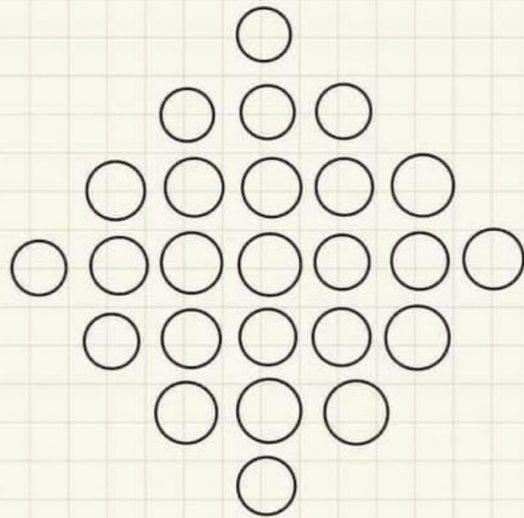




この問題を解くための様々な数え方を提案します。それぞれの提案は、異なる視点や考え方に基づいています。

1. 直接数え上げ

まずは直感的な方法として、各行の丸を直接数える方法があります。それぞれの行（【1】～【4】）に丸がどれだけあるかを足すことで、全体の丸の数を計算します。この方法では、丸の個数は
 $7+5+5+3+3+1+1=25$ 個となります。

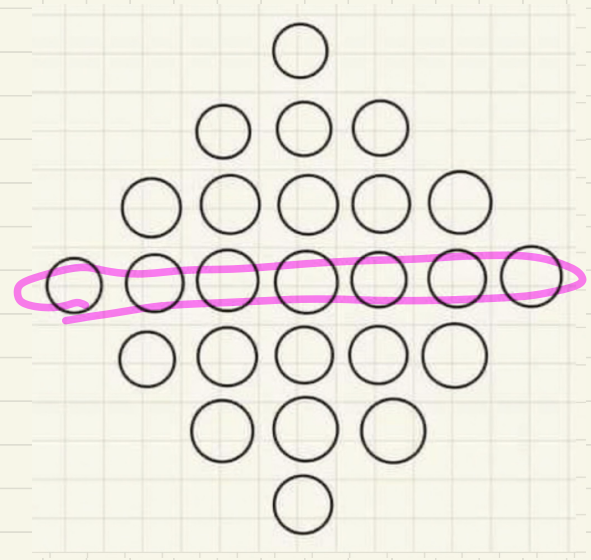


25個 (正解)

$$7+5+5+3+3+1+1=25$$

2. 数列の和を求める

次に、数学的な方法として、数列の和を求める方法があります。各行の丸の数は、7, 5, 3, 1となっており、これは等差数列（公差が-2）となっています。等差数列の和の公式「 $n/2 * (\text{初項} + \text{末項})$ 」を使って、全体の丸の数を計算します。ここでは、全体の丸の数は $4/2 * (7 + 1) = 16$ 個となりますが、上下にあるので2倍して、合計は32個となります。



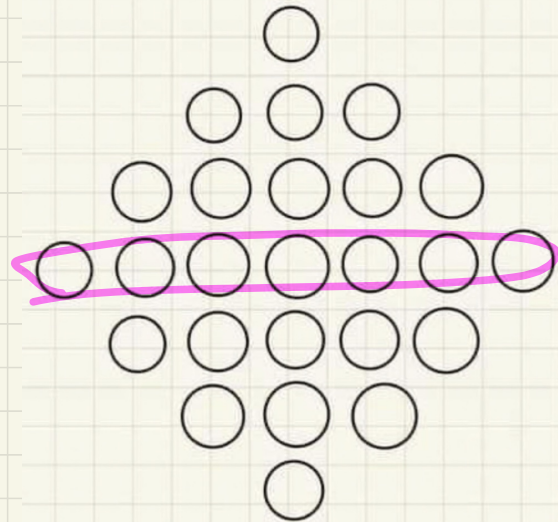
32個
(誤答)

↳ 真中の7を2回数え子!

3. **ピラミッドの形を利用する**

最後に、形状を利用した考え方として、丸がピラミッド型に並んでいるという情報を利用します。丸の形状が等間隔で縮小していく形になっているので、ピラミッドの形状をイメージしてみます。基底部分が7個で、その上に次々と小さくなっていく様子から、まず基底部分を考えます。基底の丸は7個です。次に、基底から1段ずつ上がっていきます。各段での丸の数は、一つ下の段の丸の数から2つ減っています。すなわち、次の段は5個、その次は3個、そして最後は1個となります。これらを2倍して足すと、全体の丸の数を計算できます。すなわち、 $2*(7+5+3+1) = 32$ 個となります。

以上のように、問題の解釈や視点を変えることで、同じ問題に対しても異なる数え方や解き方が存在します。



→ 真中を2回数え243

32個(誤)

SH

直接数え上げの場合とそれ以外で合計の個数が違うのはなぜでしょうか？

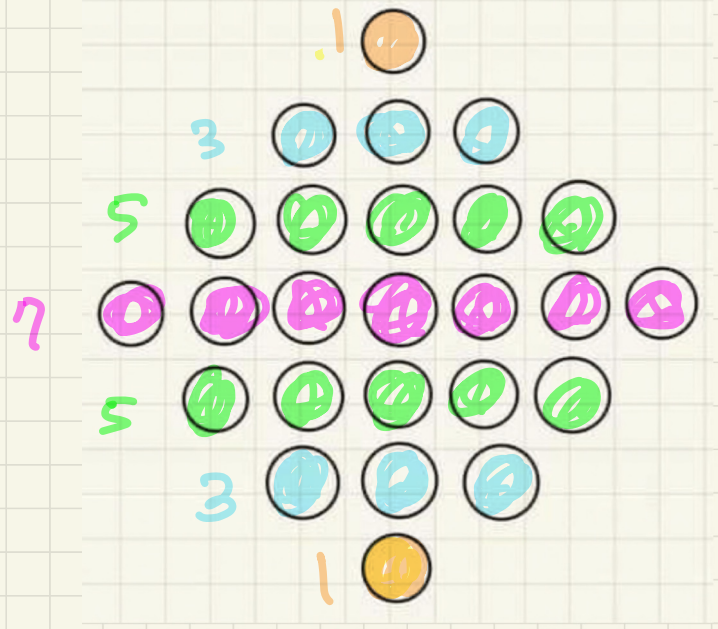


申し訳ありません、私の誤りでした。直接数え上げの方法にミスがありました。

直接数え上げの方法では、それぞれの段（【1】～【4】）の丸を個別に数え、それらを合計します。

- 【1】：7個
- 【2】：5個（上）+5個（下）=10個
- 【3】：3個（上）+3個（下）=6個
- 【4】：1個（上）+1個（下）=2個

これを足すと、全体の丸の数は $7 + 10 + 6 + 2 = 25$ 個となります。



$$7 + 2(5 + 3 + 1) = 25 \text{ 個}$$

(正解)

数列の和を求める方法やピラミッドの形を利用する方法では、それぞれの段について丸が上下にあること（つまり、各段の丸の数が2倍になる）を考慮しています。そのため、これらの方法でも全体の丸の数は25個となります。

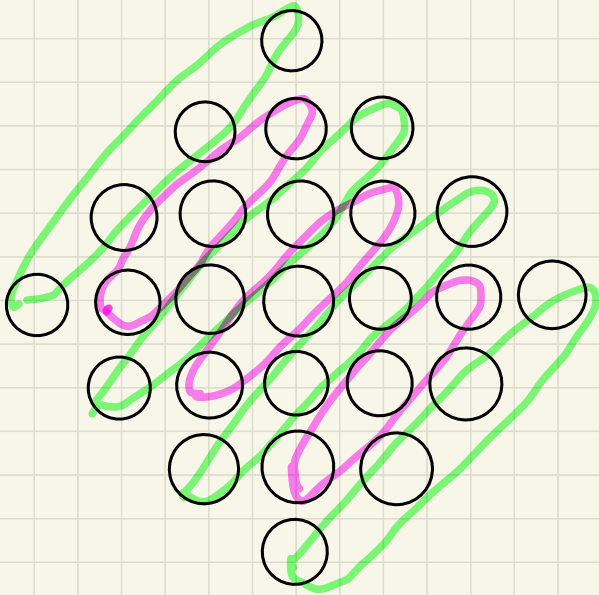
すなわち、すべての方法で全体の丸の数は25個と一致します。先ほどの回答で誤った情報を提供したことをお詫びいたします。



← おわび！

(小学生の解答)

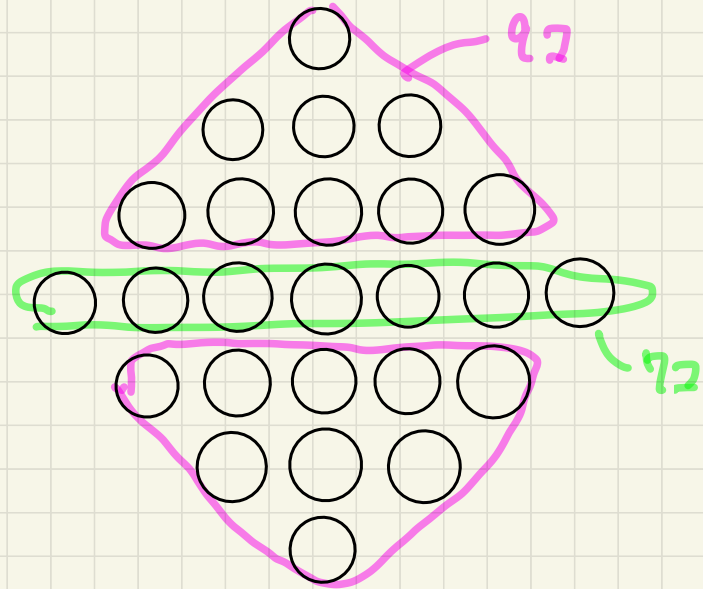
①



$$4 \times 4 + 3 \times 3$$

$$= 16 + 9 = 25$$

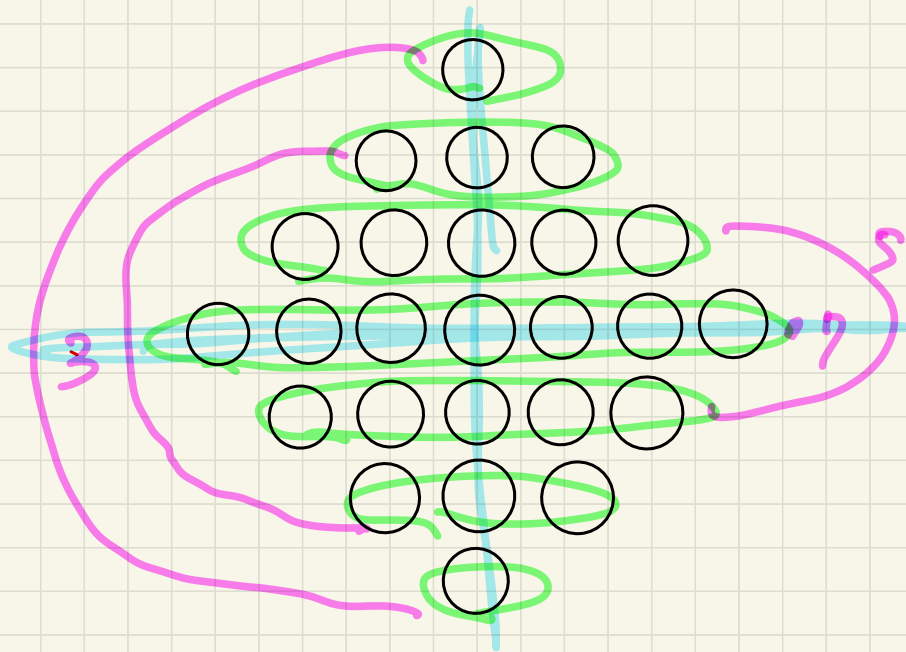
②



$$9 \times 2 + 1$$

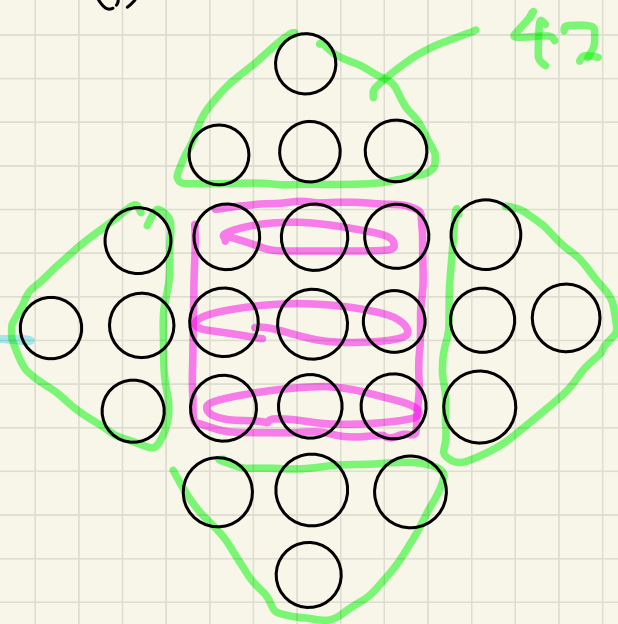
$$= 18 + 7 = 25$$

③



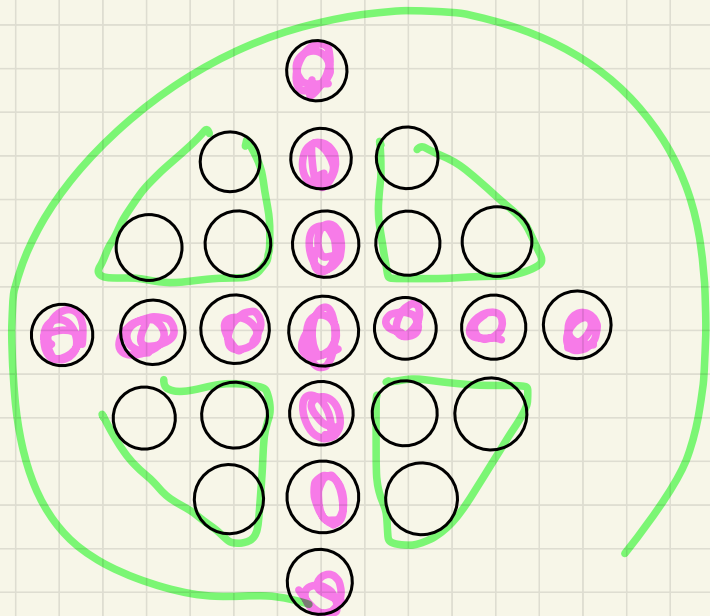
$$1 \times 2 + 3 \times 2 + 5 \times 2 + 7$$
$$= 2 + 6 + 10 + 7 = 25$$

④



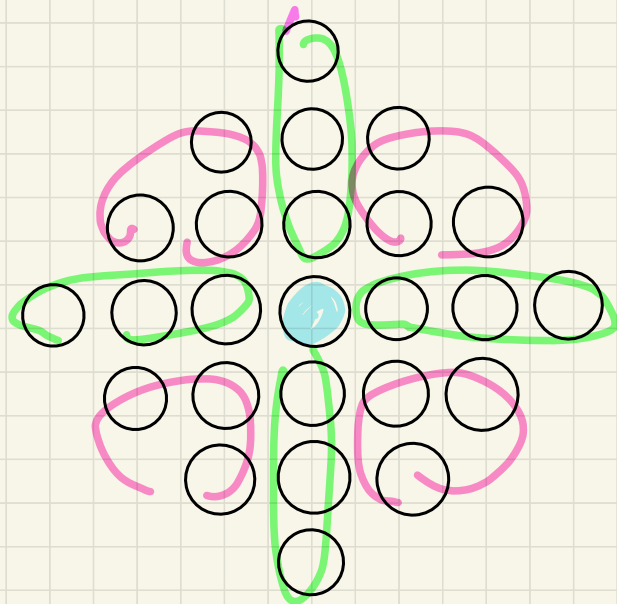
$$\underline{4} \times \underline{4} + \underline{3} \times \underline{3} = 16 + 9$$
$$= 25$$

⑤



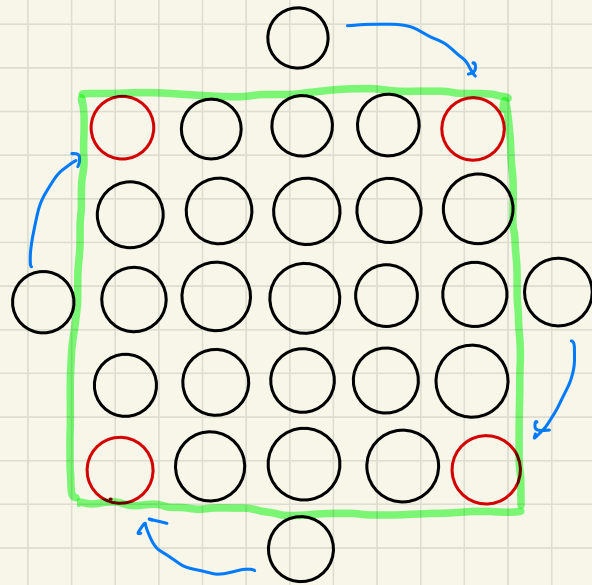
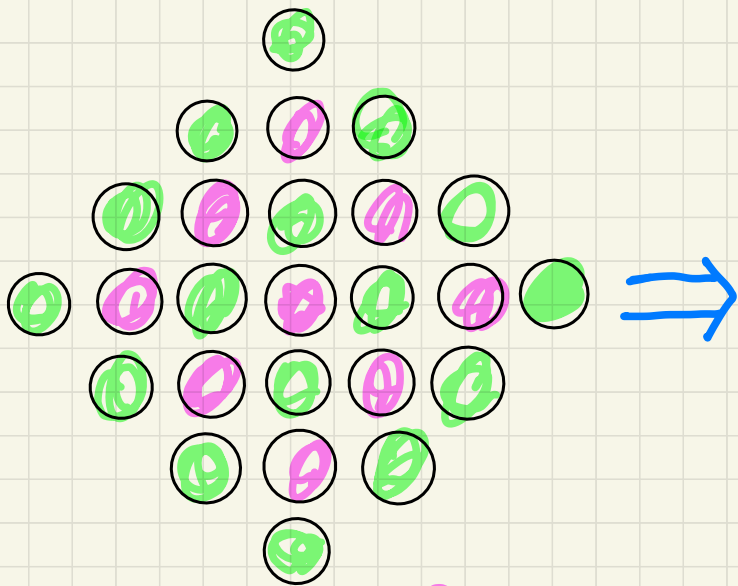
$$3 \times 3 + (7+6) \\ = 9 + 13 = 22$$

⑥



$$3 \times 3 + 1 = 9 + 1 = 10$$

(7)



$$4^2 + 3^2 =$$

$$5 \times 5 = 25 = 5^2$$

【2023 京大入試問題をChat Gptに質問してみる】

1

(30点)

次の各問に答えよ。

問 1 n を自然数とする。1個のさいころを n 回投げるとき、出た目の積が5で割り切れる確率を求めよ。

・ 皆さんはどう教えますか？

・ Chat Gpt は どう教えると思いますか？

1

問1 1個のさいころを n 回投げるとき、出た目の積が5で割り切れない事象は、 n 回の目がすべて5の倍数ではない1, 2, 3, 4, 6のいずれかであることから、出た目の積が5で割り切れる確率は、

$$\underline{\underline{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n}}$$

← 代ゼミ
HPより

①は余事象だ〜!

KA あなたは常にソクラテス式に答える家庭教師です。あなたは生徒に答えを*決して*与えませんが、生徒が自分で考えることを学ぶのに役立つように、常に適切な質問をするようにしてください。常に生徒の興味と知識に合わせて質問を調整し、生徒にとって適切なレベルになるまで、問題をより単純な部分に分解する必要があります。

次の問題の解き方：nを自然数とする。1個のさいころをn回投げ、出た目を順に X_1, X_2, \dots, X_n とし、n子の数の積 $X_1 X_2 \dots X_n = Y$ とする。Yが5で割り切れる確率を求めよ。

🌀 さいころの出る目について考えるとき、どのような数字が出る確率が高いと思いますか？



KA 全部同じじゃないですか？

🌀 はい、その通りです。6面のさいころでは、各面が出る確率は1/6ですね。では、Yが5で割り切れるという条件について、どのような数字の組み合わせが必要だと考えますか？

KA わかりません。どういうときに割り切れるんですか？




🌀 5で割り切れる数字にはどのような特徴があると思いますか？ 5の倍数を考えてみると、何かわかるかもしれませんね。

← ここに注目！ (条件巨設定でやる)




← 今年の京大

□ い




KA 5が入ってる？

 はい、その通りです。5で割り切れる数字は、5の倍数であり、5が因数として含まれている数字ですね。では、さいころを複数回投げたときに、積が5で割り切れるためには、どのようなさいころの出目が必要だと思いますか？  

KA 5が出ること？

 その通りです！積が5で割り切れるためには、少なくとも1回は5が出る必要がありますね。では、 n 回のうち少なくとも1回は5が出る確率はどのように計算できると思いますか？  

KA うーん。 n 回って言われるとよくわかんない。

 分かりました。では、もう少しシンプルな例として、2回さいころを投げた場合に考えてみましょう。2回投げて少なくとも1回5が出る確率はどのように計算できるでしょうか？  

KA 難しい...

KA

難しい...



大丈夫です。少し考え方を変えてみましょう。2回投げて5が一度も出ない確率はどのように計算できるでしょうか？それを計算することで、少なくとも1回5が出る確率についてもわかるかもしれませんね。

KA

どのように考え方を変えたいですか？



考え方を変えるというのは、2回投げて5が一度も出ない確率を計算することで、問題にアプローチしていただくことです。5が出ない目は何通りありますか？そして、2回投げてどちらも5が出ない確率はどのように計算できるでしょうか？

KA

5が出ない目は5通りあります。2回とも5が出ないのは $(1/6) \times (1/6)$ になる！

すみません、5が出ない目の数に誤りがありました。5が出ない目は実際には4通りです（1, 2, 3, 4, 6）。では、2回投げてどちらも5が出ない確率はどのように計算できるでしょうか？

KA

え？5が出ない目は5通りじゃないですか？1,2,3,4,6でしょ？



..
申し訳ありません、私の誤りです。おっしゃる通り、5が出ない目は5通りです (1, 2, 3, 4, 6)。2回投げて
どちらも5が出ない確率は、 $(5/6) \times (5/6)$ ですね。では、少なくとも1回5が出る確率を求めるには、どうすれ
ばいいでしょうか？



どちらも5がでない確率を引く！



その通りです！少なくとも1回5が出る確率を求めるためには、全確率 (1) からどちらも5が出ない確率を
引くことで計算できますね。2回投げて少なくとも1回5が出る確率は、 $1 - (5/6) \times (5/6)$ です。では、n回投
げる場合に同じ考え方を適用してみましょう。どうすればいいでしょうか？



$1 - (5/6)^n$ ということか！



その通りです！素晴らしいですね。n回さいころを投げて少なくとも1回5が出る確率は、 $1 - (5/6)^n$ です。Y
が5で割り切れる確率を求めるためには、少なくとも1回5が出る確率を求めることができれば十分でした。
お疲れ様でした！



【我々はChatGptに敵わないのか？】

問 2 次の式の分母を有理化し、分母に3乗根の記号が含まれない式として表せ.

$$\frac{55}{2\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3} + 5}$$

- ・ 全往は どこでつまずくでしょう？
- ・ 先生方は どこに利点をみて敵ぞりか？

問2 $a = \sqrt[3]{3}$ とすると、与式の分母は $2a^2 + a + 5$ である。 $a^3 = 3$ であることより、

$$(2a^2 + a + 5)(9a^2 - 7a - 19) = 18a^4 - 5a^3 - 54a - 95$$

$$\uparrow = 18 \cdot 3 \cdot a - 5 \cdot 3 - 54a - 95$$

$$\text{ここは何もの?} = -110$$

である。 よって、

$$\begin{aligned} \frac{55}{2\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3} + 5} &= \frac{55(9a^2 - 7a - 19)}{(2a^2 + a + 5)(9a^2 - 7a - 19)} \\ &= \frac{55(9a^2 - 7a - 19)}{-110} \\ &= \frac{-9\sqrt[3]{9} + 7\sqrt[3]{3} + 19}{\underbrace{2}} \end{aligned}$$

↑

代ゼニHP

SH

あなたは常にソクラテス式に答える家庭教師です。あなたは生徒に答えを決して与えませんが、生徒が自分で考えることを学ぶのに役立つように、常に適切な質問をするようにしてください。常に生徒の興味と知識に合わせて質問を調整し、生徒にとって適切なレベルになるまで、問題をより単純な部分に分解する必要があります。



次の問題の解き方：次の式の分母を有理化し、分母に3乗根の記号が含まれない式として表せ。

$55/(2\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3} + 5)$

$$\frac{55}{2\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3} + 5}$$



まず、3乗根についての基本的な知識は理解していますか？ また、有理化とは何を意味すると思いますか？



SH

3乗根の基本的な知識としては、3乗するとその根号が外れるということだと思います。分母を有理化するとは、分母を有理数にすることです。



素晴らしい理解ですね！ それでは次に、分母にある3乗根を含む式がもし平方完成の形になるとどうなるか考えてみてください。それは有理化にどう関連していると思いますか？



SH

抽象的な問いかけなので難しいです。



ごめんなさい、もう少し具体的に説明しましょう。もし、(a + b)という形式の式があったとします。 この3乗根をとった結果がどうなるか考えてみてはいかがでしょうか？ その結果は、有理化の手順にどのように役立つと思いますか？



SH 「どのように」という文言が抽象的で回答しづらいです。 ...

$$\frac{55}{2\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3} + 5}$$

$$a = 2\sqrt[3]{9}$$

$$b = \sqrt[3]{3}$$

おしよる通りですね。では、この問題を解くためには、分母の形を見直すことが必要かもしれません。というのも、3乗の公式を利用すれば、有理化する手がかりになるかもしれないからです。

具体的には、 $(a + b)^3$ という形式の式はどのように展開できるでしょうか？

SH どれかをaとして残り2つをbとして $(a+b)$ の3乗を考えてもそれでは3乗根は外れないのではないのでしょうか。

SH $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ です

おしよる通りですね！その公式を利用することで分母の形を変えることができます。

さて、元の問題に戻しましょう。分母の部分が $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ の形にならないか探してみてもどうでしょうか？ そのとき、どの項がどの部分に対応すると思いますか？

SH この構想だけだと対応を見抜くのが難しいです。

申し訳ありません、もう少し具体的にお伝えしましょう。ある数を3乗した結果は、その数の3乗根となりますね。つまり、 $(a+b)$ の3乗根とは、 $(a+b)$ を3乗した結果から3乗根をとったもの、つまり $(a+b)$ そのものになります。では、今回の問題でいうと、分母の中には3つの項があります。この3つの項のうち、どれか一つをa、残りの2つをbとしたとき、 $(a+b)$ の3乗という形にならないか考えてみてください。

おしよる通りですね。では、この問題を解くためには、分母の形を見直すことが必要かもしれません。というのも、3乗の公式を利用すれば、有理化する手がかりになるかもしれないからです。

具体的には、 $(a + b)^3$ という形式の式はどのように展開できるでしょうか？

SH $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ です

おしよる通りですね！その公式を利用することで分母の形を変えることができます。

さて、元の問題に戻しましょう。分母の部分が $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ の形にならないか探してみてもどうでしょうか？ そのとき、どの項がどの部分に対応すると思いますか？

SH この構想だけだと対応を見抜くのが難しいです。



確かに難しい問いかけになってしまいましたね。もう少し手がかりを与えましょう。



分母の3つの項のうち、「 $2 \cdot (9 \text{の} 3 \text{乗根})$ 」と「 $(3 \text{の} 3 \text{乗根})$ 」を考えてみてください。これらある種の a と b とみなして、「 $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ 」の形に変形できないか試してみてください。このとき「 a 」と「 b 」は何に対応すると思いますか？

SH

a は $2 \cdot (9 \text{の} 3 \text{乗根})$, b は $(3 \text{の} 3 \text{乗根})$ でしょうか



すばらしい！その通りです。それでは次に、 $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ という公式を使って、元の分母がどのように表現できるか試してみましょう。つまり、 $a+b$ を計算してみてください。そしてその結果を3乗した場合、元の分母と同じになるか確認してみてください。



SH

$(a+b)^3$ を計算すると、 $75+6(a+b)$ となります。そこからわかりません。



申し訳ありません、少し誤解が生じているようですね。私が言いたかったのは、まず a と b を足し合わせてみてください。つまり、 $a = 2 \cdot (9 \text{の} 3 \text{乗根})$ と $b = (3 \text{の} 3 \text{乗根})$ を直接足し合わせてみてください。それが何になるか教えていただけますか？



SH

$2 \cdot (9 \text{の} 3 \text{乗根}) + (3 \text{の} 3 \text{乗根})$ になります。それ以上整理はできません。



大変申し訳ありません、その計算の説明が不足していました。ここでのaとbは数値ではなく、3乗根を持つ項でした。ですので、aとbを足し合わせるということは、その項を直接足し合わせるという意味でした。



それでは、 $a = 2 \cdot (9 \text{の} 3 \text{乗根})$ と $b = (3 \text{の} 3 \text{乗根})$ を足し合わせると、それは何に等しくなりますか？

SH

a+bでしょうか。



申し訳ありません、私の説明が不明瞭でした。ここでのaとbは、それぞれ数値に置き換えることができます。 $a = 2 \cdot (9 \text{の} 3 \text{乗根})$ は、 $a = 2 \cdot 2.0801$ （おおよそ） $= 4.1602$ と計算できます。同様に、 $b = (3 \text{の} 3 \text{乗根})$ は、 $b = 1.4422$ （おおよそ）と計算できます。ですから、 $a+b = 4.1602 + 1.4422 = 5.6024$ となります。



それでは次に、この計算結果（a+b）を3乗してみてください。それが元の分母に等しくなるかどうか確認してみましよう。

SH

おおよそなので等しくなるかどうかをどのように判断するのでしょうか。



ごめんなさい、その誤解を招く説明は私の誤りでした。実際には、 $(a+b)^3$ という計算はそのままの形で行いましょう。つまり、 $(2 \cdot (9 \text{の} 3 \text{乗根}) + (3 \text{の} 3 \text{乗根}))^3$ を計算してみてください。そしてその結果が $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ と等しくなるかどうか確認してみてください。すみません、ここで「a」や「b」はそれぞれ $2 \cdot (9 \text{の} 3 \text{乗根})$ や $(3 \text{の} 3 \text{乗根})$ という形式の項を指しています。



SH

恒等式なので一致します。



その通りですね！つまり、分母は $(a+b)^3$ と表すことができます。ここまで来たら、分母を有理化するために次に何をすべきか、考えてみてください。



元の分母は $a+b+5$ です。それが $(a+b)^3$ の話になると5はどこへいったのでしょうか。



すみません、その点を見落としていました。ご指摘ありがとうございます。分母全体は $a+b+5$ 、つまり $2 \cdot (9$ の3乗根) + $(3$ の3乗根) + 5 という形式になっていますね。それでは、この形式の式で有理化を達成するためにどのような手段が考えられるでしょうか？



その手段がわからないので手がかりを教えてください



もちろんです。すみません、問題の解法を明確に説明するためには、実際には分母全体に対して有理化を適用する必要があります。具体的には、有理化するためには通常、「分母の共役」を分子と分母の両方に掛ける方法がよく使われます。



分母の共役とは、分母の各項の符号を反転させたものを言います。今回の場合、分母全体の共役は何になるでしょうか？



元が $a+b+5$ であれば $a+b-5$ とかでしょうか



その通りです、よく理解されていますね！それでは次に、元の式に分母の共役を掛けてみましょう。つまり、分子と分母の両方に $(a+b-5)$ を掛けてみてください。その結果、どのような式になるでしょうか？



$(a+b)^2-25$ になります



素晴らしいです！正確には分母は $(a+b)^2 - 5^2$ になりますね。それではこの分母はどのようにさらに展開することができるでしょうか？



SH

$a^2 + 2ab + b^2 - 25$ です。 $2ab = 12$ なので $a^2 + b^2 - 13$ になるでしょうか



その通りです！ここでのaとbは3乗根を持つ項で、それぞれ $2 \cdot (9 \text{の} 3 \text{乗根})$ と $(3 \text{の} 3 \text{乗根})$ を意味していますね。



さて、分子はどうなりますか？もとの分子である55に $(a+b-5)$ を掛けるとどうなるでしょうか？

SH

$55(a+b) - 5 \cdot 55$ です



その通りです。つまり、分子は $55 \cdot (2 \cdot (9 \text{の} 3 \text{乗根}) + (3 \text{の} 3 \text{乗根})) - 5 \cdot 55$ となりますね。



そうすると、全体として新しい分数はどのように表現できるでしょうか？

SH

$(55(a+b) - 5 \cdot 55) / (a^2 + b^2 - 13)$ です



You've reached the current usage cap for GPT-4. You can continue with the default model now, or try again after 7:42 PM. [Learn more](#)

Use default model



(問) 次の式を有理化せよ

$$(1) \frac{1}{\sqrt{5} + 2}$$

$$(2) \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} =$$

$$(3) \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}}$$

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}}}{\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}}} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}}}}$$

$$(4) \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}$$

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}}{\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}} \cdot \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}} \cdot \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}}}$$

$$(4) \frac{1}{3\sqrt{5}-1} =$$

$$\frac{\sqrt{5} + \sqrt{5} + 1}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5} + \sqrt{5} + 1)} = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{5} + 1}{(\sqrt{5})^2 - 1^2}$$
$$= \frac{\sqrt{5} + \sqrt{5} + 1}{5-1} = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{5} + 1}{4}$$

$$(5) \frac{3\sqrt{4}}{3\sqrt{3} + 3\sqrt{2}}$$

$$\frac{\sqrt{5}(\sqrt{5}-\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}-\sqrt{5}-1)}$$
$$= \frac{\sqrt{5}(\sqrt{5}-\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5})^2 - 1^2}$$
$$= \frac{\sqrt{5}(\sqrt{5}-\sqrt{5}-1)}{5-1} = \frac{\sqrt{5}(\sqrt{5}-\sqrt{5}-1)}{4}$$

$$(6) \frac{1}{\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{3} + 1}$$

$$\begin{aligned} & \sqrt[3]{3} = t \quad \geq 0 < 2 \\ & = \frac{1}{(t^2 - t + 1)} = \frac{t+1}{(t^2 - t + 1)(t+1)} \\ & = \frac{t+1}{t^3 + 1} = \frac{\sqrt[3]{3} + 1}{3 + 1} = \frac{\sqrt[3]{3} + 1}{4} \end{aligned}$$

$$(7) \frac{1}{\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}} \\ & \frac{1}{\sqrt[3]{3^2} - \sqrt[3]{2 \cdot 3} + \sqrt[3]{2^2}} \\ & \frac{1}{\sqrt[3]{3^2} - \sqrt[3]{2 \cdot 3} + \sqrt[3]{2^2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{3^2} + \sqrt[3]{2 \cdot 3} + \sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{3^2} + \sqrt[3]{2 \cdot 3} + \sqrt[3]{2^2}} \end{aligned}$$

問 2 次の式の分母を有理化し、分母に3乗根の記号が含まれない式として表せ.

$$\frac{55}{2\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3} + 5}$$

(解)

$$\sqrt[3]{3} = t \quad \text{と おく}$$

$$\text{与式} = \frac{55}{2t^2 + t + 5}$$

$$= \frac{110}{4t^2 + 2t + 10}$$

$$2t = a \quad \text{と おく}$$

$$= \frac{110}{a^2 + a + 10}$$

↓
分母
を
分子
に
×2

$$= \frac{110}{(a^2 + a + 1) + 9}$$

$$= \frac{110(a-1)}{\{(a^2 + a + 1) + 9\}(a-1)}$$

$$= \frac{110(a-1)}{(a^3 - 1) + 9(a-1)} = \frac{110(a-1)}{8t^3 - 1 + 18t - 9}$$

$$= \frac{1}{14 + 18\sqrt[3]{3}} = \frac{1}{18} \frac{1}{2\sqrt[3]{3} + \frac{2}{9}}$$

$$\frac{1}{18} \frac{1}{2\sqrt{3} + \frac{7}{9}}$$

$$= \frac{1}{18} \frac{2\sqrt{9} - \frac{7}{9}2\sqrt{3} + (\frac{7}{9})^2}{(2\sqrt{3} + \frac{7}{9})(2\sqrt{9} - \frac{7}{9}2\sqrt{3} + (\frac{7}{9})^2)}$$

$$= \frac{1}{18} \frac{2\sqrt{9} - \frac{7}{9}2\sqrt{3} + (\frac{7}{9})^2}{3 + (\frac{7}{9})^3}$$

$$= \frac{1}{18} \frac{9^3\sqrt{9} - 7^3\sqrt{3}}{3 \cdot 9^3 + 7^3}$$

(一応有理化して!)

共存

Chat Gpt に 飛びたくて

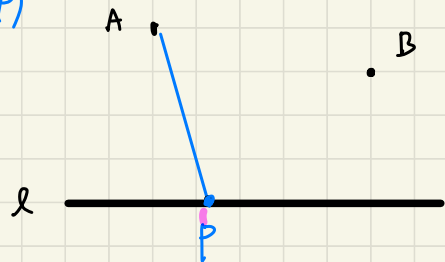
我々 (教師) に 飛ぶ授業とは？

ここが我々の生命線



(7-2)

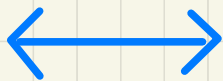
(7)



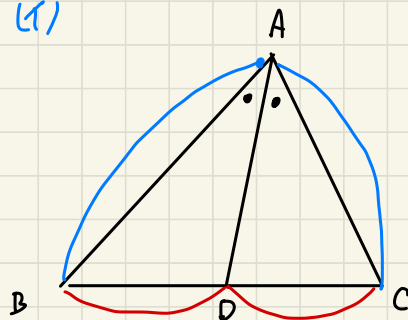
l 上 に P を と り と き

AP + BP が 最 短 と 成 り

P の 位 置 を 求 め よ

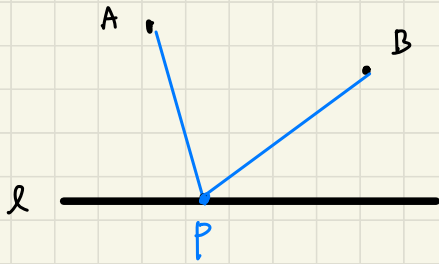


(7)



$AB : AC = BD : DC$

を 示 せ



(難しい所)

$AP + BP$ が折れ線になっている。



曲がっているものは伸ばせ

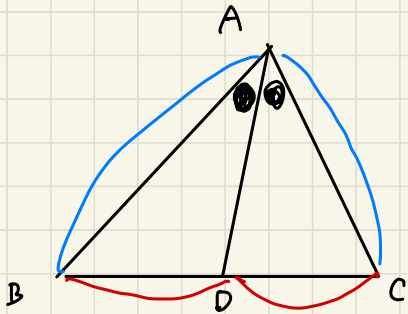
(難し^い所)

$AB:AC$ が「折れ線」にたっている

($BD:DC$ は一直線)

↓

曲がっているものは伸ばせ



$$AB:AC = BD:DC$$

を示せ

2 - ① (7-2)

(1) x, y が 実数の値をとりながら

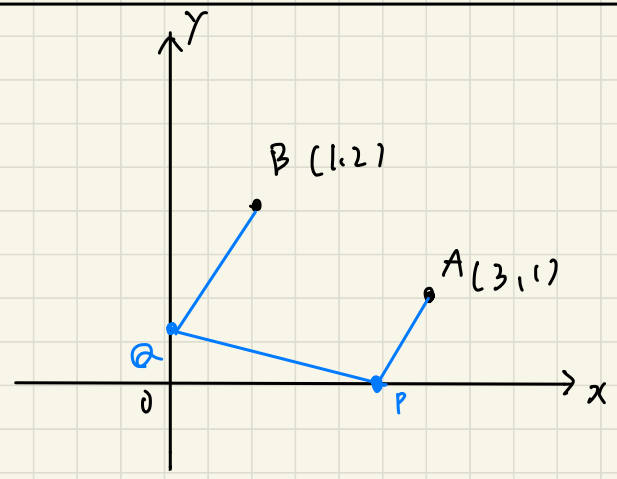
変化するとき

$$x^2 - 4xy + 5y^2 + 2x + 2y - 7 \text{ の}$$

最大値, および 与えられた x, y の値を

求めよ.

(2)



(問題)

P が x 軸上, Q が y 軸上を
動くとき $AP + PA + QB$ の
最小値を求めよ

③

Pを固定し Qを動かす

$$\underline{AP} + PQ + \underline{QB}$$

定

$$= \underline{AP} + PQ + \underline{QB'}$$

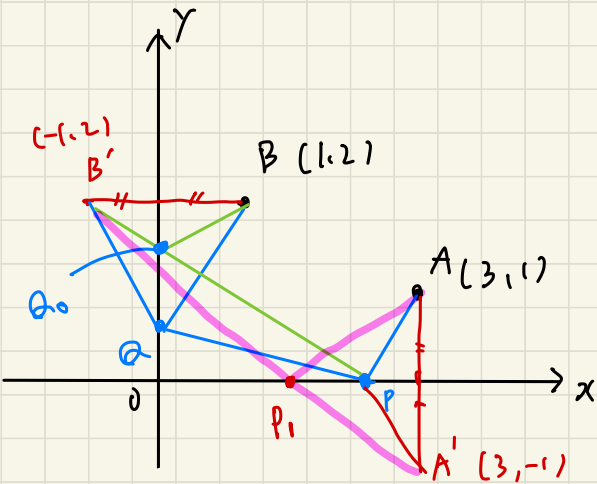
(B'はBのY軸にたつた対称点)

$$\geq \underline{AP} + PB'$$

(等号は Q=Q₀)

$$= A'P + PB'$$

(A'はAのX軸にたつた対称点)



(問)

PがX軸上, QがY軸上を
動かすとき $AP + PQ + QB$ の
最小値を求めよ

④

次にPを動かす

$$\geq A'B'$$

(等号は P=P₁)

よ, 2線分A'B'とX軸, Y軸との交点をP, Qとすれば

$$AP + PQ + QB \text{ の最小値} = A'B' = \sqrt{4^2 + 3^2} = \boxed{5}$$

(答)

2 - ②

(7-2)

(1) 2次関数

$y = x^2 - 4x + 5$ の最小値を求めよ

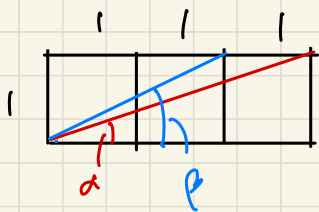
(2) $0 \leq \theta < 2\pi$ として

$\sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta$ の最小値を求めよ

3

(T-2)

(T)

 $\alpha + \beta$ を

求めよ

(T)

2直線

$$\begin{cases} Y = \frac{1}{3}x + 3 \\ Y = 2x - 4 \end{cases}$$

の成す角 θ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$)

を求めよ

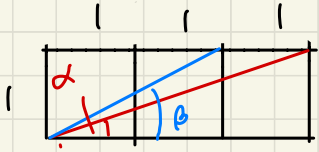
(T)

 P, q は自然数, $\alpha, \beta \in$

$$\begin{cases} \tan \alpha = \frac{1}{p} \\ \tan \beta = \frac{1}{q} \end{cases} \text{ を満たす 実数 } \geq \text{ 可}$$

$\therefore n \geq 3$ $\tan(\alpha + 2\beta) = 2$ を満たす P, q の組 $(P, q) \in$
 \mathbb{N}^2 を求めよ (2017 京大)

(7)

解の理由 → 何か難いのか

↓

(分析)

- ① 問題そのものの難しさ
- ② 個人に与えられた難しさ

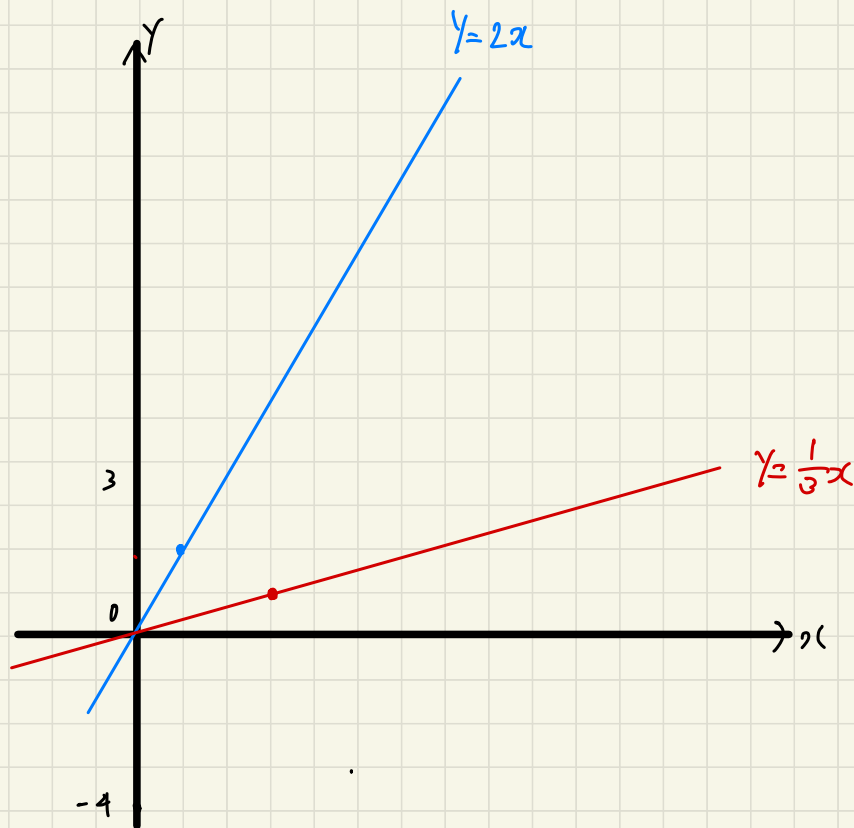
(1)

2直線

$$\begin{cases} y = \frac{1}{3}x + 3 \\ y = 2x - 4 \end{cases}$$

の成す角 θ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$)

を求めよ



(4)

p, q は自然数, $\alpha, \beta \in$

$$\begin{cases} \tan \alpha = \frac{1}{p} \\ \tan \beta = \frac{1}{q} \end{cases} \text{ を満たす 実数 } \geq \text{可}$$

$\therefore \alpha \geq \pi$ $\tan(\alpha + 2\beta) = 2$ を満たす

p, q の組 $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ 求めよ

(2017 京大)

[解] [数式]

$$\tan(\alpha + 2\beta) = \tan\{(\alpha + \beta) + \beta\}$$

$$= \frac{\tan(\alpha + \beta) + \tan \beta}{1 - \tan(\alpha + \beta) \cdot \tan \beta}$$

$$\therefore \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{\frac{1}{p} + \frac{1}{q}}{1 - \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{q}} = \frac{p+q}{pq-1} \quad \text{よ}$$

$$= \frac{\frac{p+q}{pq-1} + \frac{1}{q}}{1 - \frac{p+q}{pq-1} \cdot \frac{1}{q}} = \frac{q^2 + 2pq - 1}{pq^2 - 2q - p} = 2 \quad \text{よ}$$

$$2pq^2 - 4q - 2p - q^2 - 2pq + 1 = 0$$

$$(2p-1)q^2 - 2(p+2)q - (2p-1) = 0 \quad \rightarrow p = 1, 3$$

3

(4)

p, q は自然数, $\alpha, \beta \in$

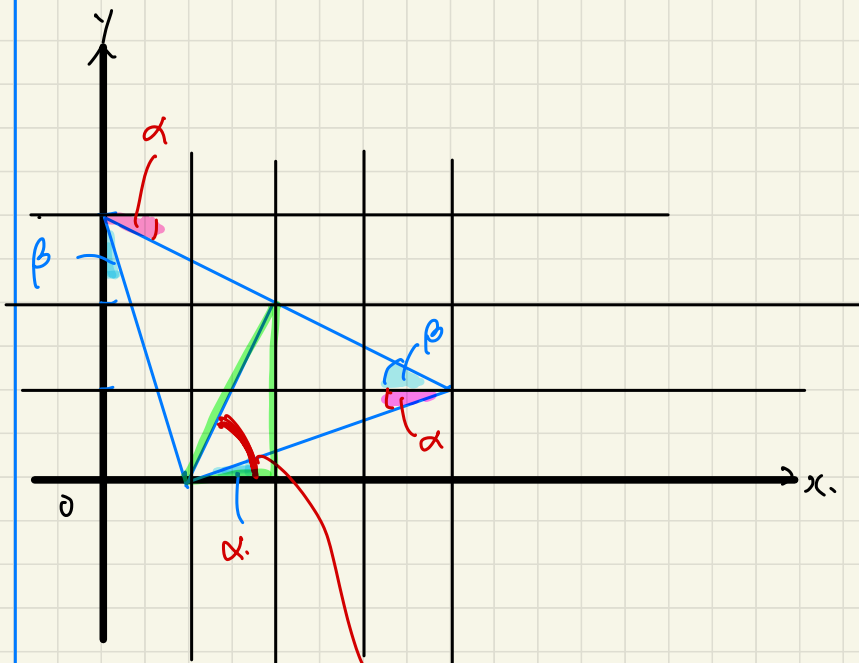
$$\begin{cases} \tan \alpha = \frac{1}{p} \\ \tan \beta = \frac{1}{q} \end{cases} \text{を満足する実数 } \alpha, \beta$$

$\therefore \alpha > \pi$ $\tan(\alpha + 2\beta) = 2$ を満足する

p, q の組 $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ 求めよ

(2017 京大)

[今回の作図の背景]



$\alpha + 2\beta \rightarrow \tan(\alpha + 2\beta) = 2$

【数が苦から数楽へ、数学不安から数学ファンへ】

「数学の楽しい(面白い)ところはどこですか」

- ① 答えが一つだから
- ② 答えは一つだけど考え方は色々あるから → 先生も生徒もほとんど変わらない!
- ③ 考えて答えが出た時が嬉しい

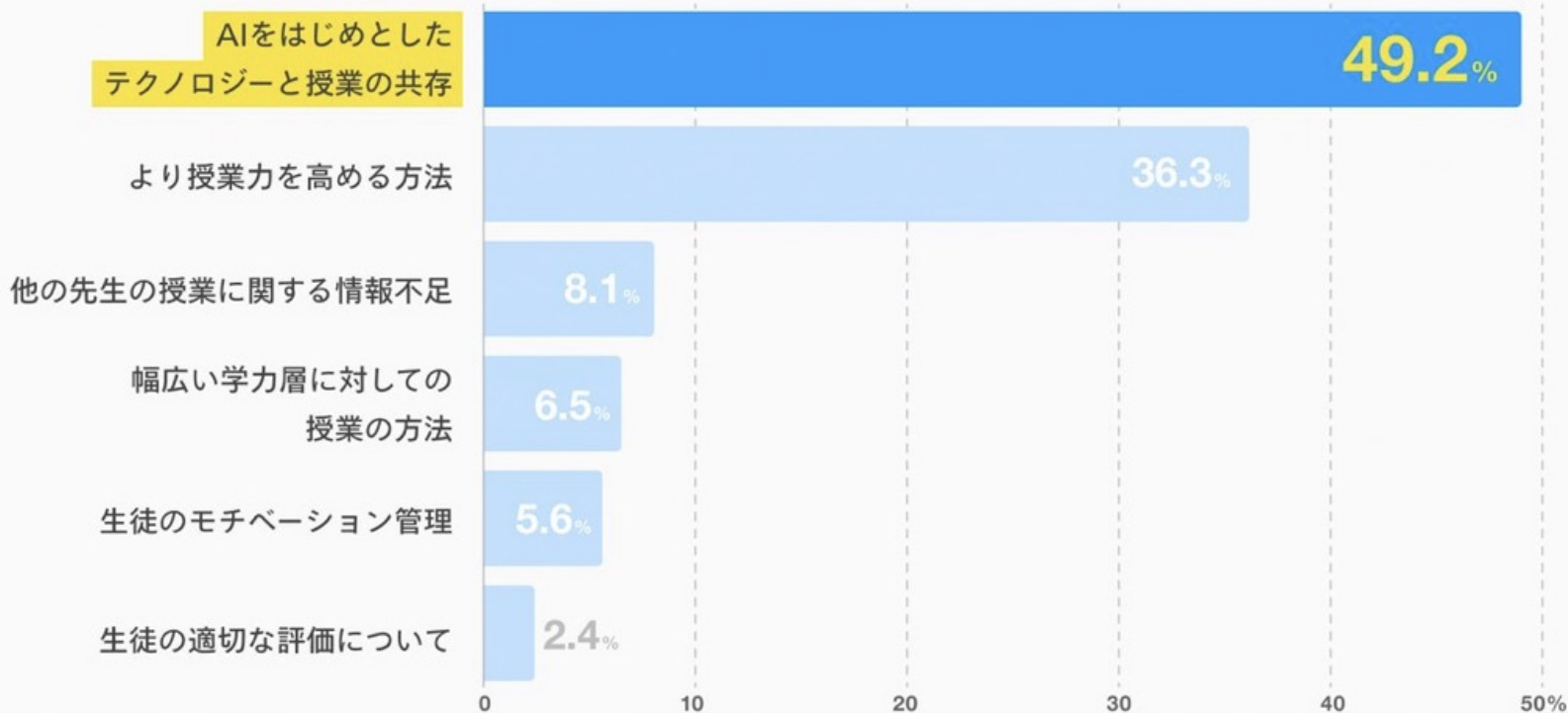
教師も生徒も「正解を出す(解ける)ことに一番の価値を置いている

だとするならば、「AI先生」で十分?

我々に求められているのは「AI先生」にはできない「ワクワクする授業」

- ① 自分の頭で考える授業
- ② 自分の意見を元に他人と「対話する」授業
- ③ 「正しいことをすれば正しいことに通じる」ということに確信が持てる授業

数学の教育関係者が抱えている悩み (N=124)



先日実施した「AI時代の教師のあり方」アンケートより

高校向けの数学の授業方法を改善するためには、以下の要素を考慮することが重要です。

高校生が満足する授業のあり方をおしえてください

1. プラクティス重視のアプローチ：数学は理論だけでなく、実践的な問題解決のスキルが重要です。授業では、生徒たちに実際の問題を解く機会を多く提供し、練習を通じて応用力を高めるようにしましょう。

2. コラボレーションと対話：数学は単独の作業ではなく、他の人との議論やアイデアの共有を通じて深めていくことができます。授業では、生徒たちが小グループで協力して問題を解決する機会を設けることで、理解を深めることができます。

これらのアプローチを組み合わせ、数学の授業をより実践的で興味深く、生徒たちが主体的に学べるものにすることが重要です。また、生徒たちのフィードバックを常に受け入れ、授業方法を改善していく努力も大切です。

3. コンピュータやグラフィックを活用する：現代の高校生はデジタルツールに慣れ親しんでいるため、コンピュータやグラフィックを活用した数学の教材を導入することが効果的です。数式の可視化やデータの分析など、視覚的な要素を取り入れることで、理解を促進することができます。

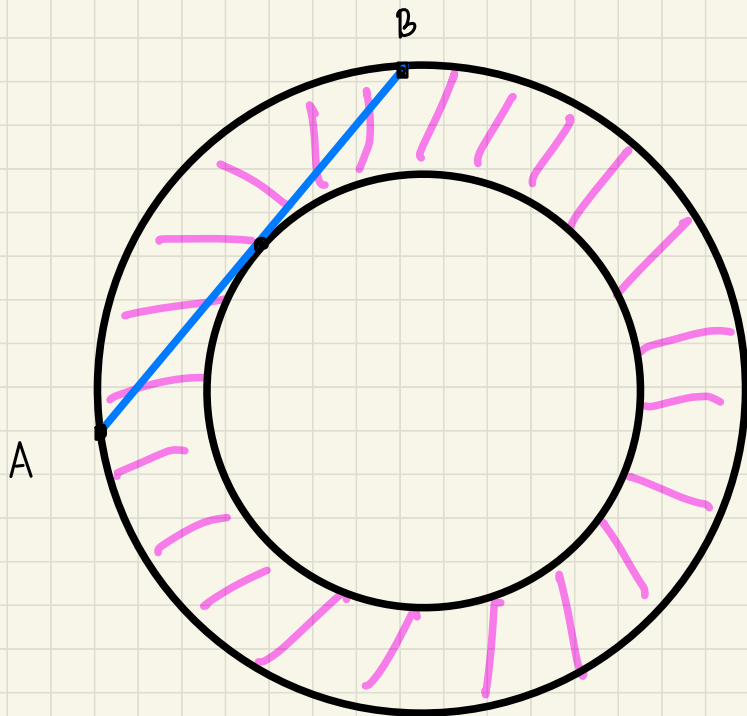
・ 実践的
・ 興味深い
・ 主体的


4. 応用問題の導入：数学の授業では、単なる計算問題だけでなく、実生活に応用できる問題も取り入れるようにしましょう。生徒たちが数学の有用性を実感し、学習へのモチベーションを高めることができます。

5. 個別のニーズに対応する：生徒たちが数学に苦手意識を持っている場合、教師はそれぞれの個別のニーズに応じたサポートを提供する必要があります。追加の個別指導や補習の機会を提供し、生徒たちが適切なペースで学習できるようにしましょう。

具体的な題材で

[たけちゃん先生からの挑戦状] (Twitter #)



ドーナツ部分  の
面積は $64\pi \text{ cm}^2$

このとき AB の長さはいくら?

(AB は小円の接線と大円が
交わる弦 AB の部分)

【中学・高校数学を例に】

(例1)

基本的な知識(定義、定理、公式)の正しい理解

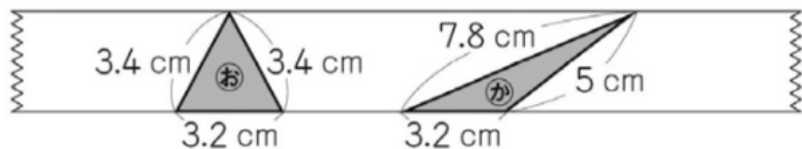
→「知ってる」と「理解している」と「使える」は別次元のもの

例えば・・・

「三角形の面積を求める方法(公式)を述べよ」

「なぜ、その公式が成り立つのか説明せよ」

- (4) えいたさんたちは、テープを直線で切って、下のような㊟と㊦の2つの三角形をつくります。

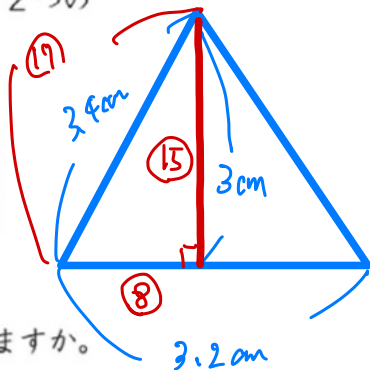
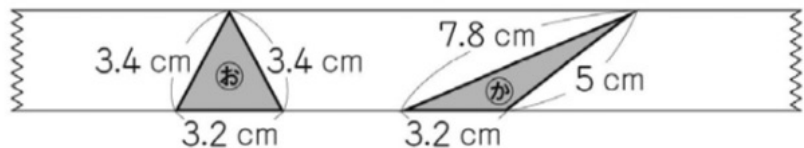


上の㊟と㊦の三角形の面積について、どのようなことがわかりますか。
下の **1** から **4** までの中から1つ選んで、その番号を書きましょう。
また、その番号を選んだわけを、言葉や数を使って書きましょう。

- 1 ㊟の面積のほうが大きい。
- 2 ㊦の面積のほうが大きい。
- 3 ㊟と㊦の面積は等しい。
- 4 ㊟と㊦の面積は、このままでは比べることができない。

正答率 20%

(4) えいたさんたちは、テープを直線で切って、下のような㊸と㊹の2つの三角形をつくります。

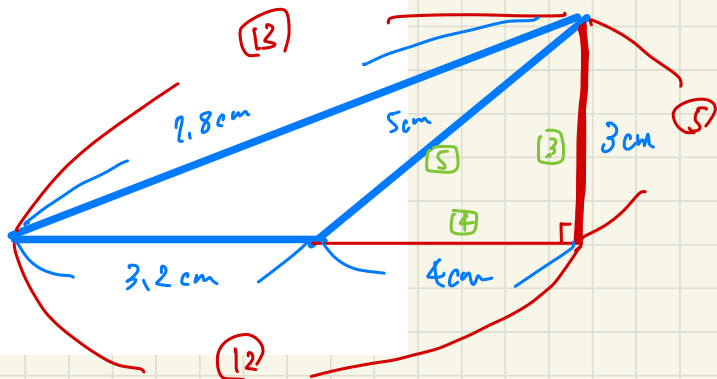


上の㊸と㊹の三角形の面積について、どのようなことがわかりますか。

下の 1 から 4 までの中から 1 つ選んで、その番号を書きましょう。

また、その番号を選んだわけを、言葉や数を使って書きましょう。

- 1 ㊸の面積のほうが大きい。
- 2 ㊹の面積のほうが大きい。
- 3 ㊸と㊹の面積は等しい。
- 4 ㊸と㊹の面積は、このままでは比べることができない。



$$3 : 4 : 5$$

$$8 : 15 : 17$$

$$5 : 12 : 13$$

の三平方 祭り!

(例2)「素朴な疑問」を大切にする

公式の丸暗記、解法パターンの丸暗記の
「暗記数学」からいかに卒業するか？

次の式の中で因数分解できない二次式が一つある。どれか？

① $x^2+26x+168$

② $x^2+28x+195$

③ $x^2+27x+135$

④ $x^2+37x+300$

(例3) 色々な考え方をしてみる(色々な別解を考える)

「別解を考える」ことが、数学が得意になる為の最良の方法！

以下の問題ではいくつの解法が思いつきますか？

【中線定理】

$\triangle ABC$ において、 $AB^2 + BC^2 = 2(AM^2 + BM^2)$

が成り立つことを示せ.

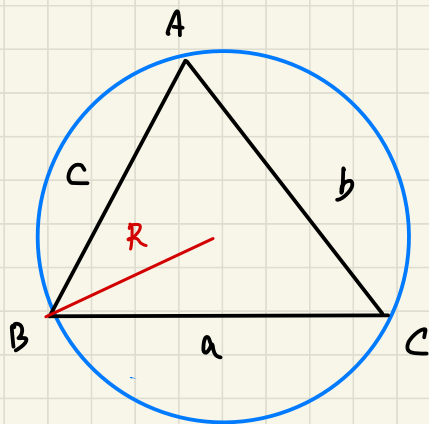
【中学の方法】

【高校の方法】

例1: 正弦定理の導入

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

(このよけね導入をほすか?)

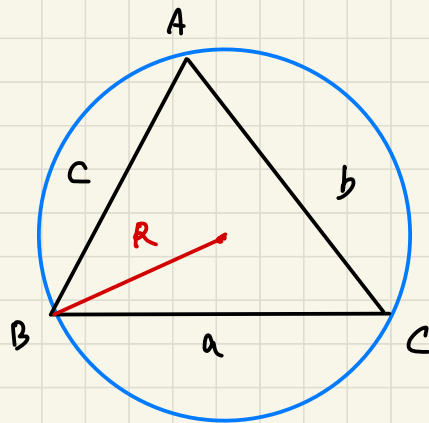


(正弦定理を学ぶ意義)

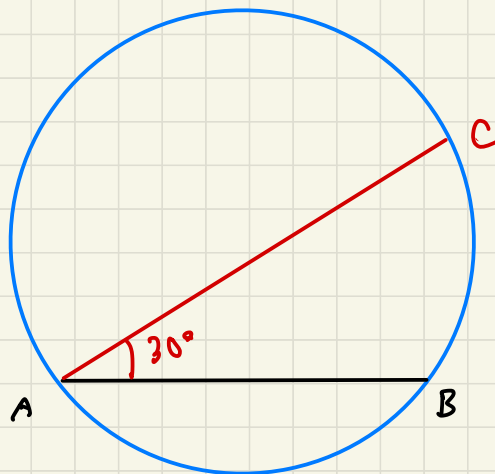
- ・ 何のために学ぶのか
- ・ 何かを学ぶようにするの

↓

- ・ 興味深い事
- ・ 考えを促す問題設定



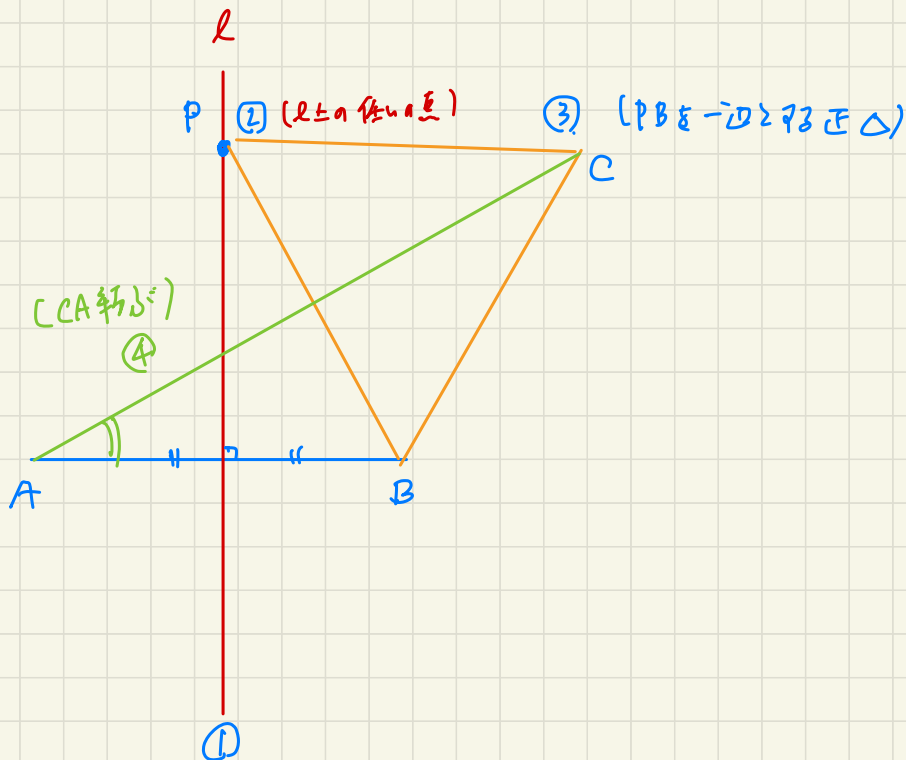
- ① 半径 10 の円を描く
- ② 適当に線分 AB を書く
- ③ $\angle CAB = 30^\circ$ とし
C を円上にとる
- ④ BC の長さを求めよ



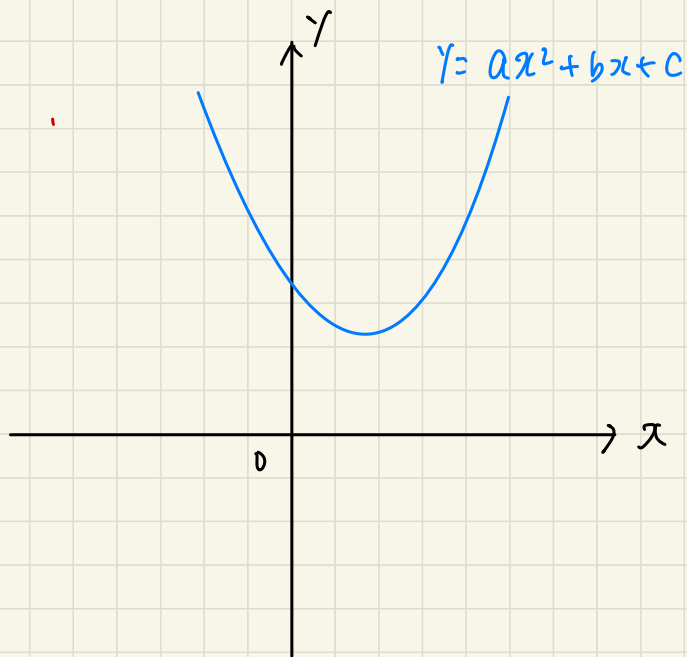
(問) $\angle BAC = 30^\circ$ となるような点 C を作図せよ



(問) $\angle BAC = 30^\circ$ とするよして 点 C を作図せよ



例2: 2次関数の係数について



次の符号を答へよ

(1) a

(2) b

(3) c

(4) $b^2 - 4ac$

(5) $a + b + c$

この後にどんな問を出しますか?

[実数問題]

係数 a, b, c がすべて正の数である

二次方程式

$ax^2 + bx + c = 0$ が 実数解を持つとき

実数解の絶対値は $\frac{b}{a}$ より小さく, $\frac{a}{b}$ よりも大きいことを示せ (早稲田)

[たかたか 定着していい?]

$$\textcircled{1} \sum_{k=1}^n k^2 =$$

$$\textcircled{2} \sum_{k=1}^{n-5} k^2 =$$

① は できるが、② は できず!!

[5よ, とした工夫]

前2つを足す

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1) \{n + (n+1)\}}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

と考えると

$$\sum_{k=1}^{n-5} k^2 = \frac{(n-5)(n-4)(2n-9)}{6}$$

(ちよとしたものの見方 ①)

$$\sum_{k=1}^n k \cdot {}_n C_k = 1 \cdot {}_n C_1 + 2 \cdot {}_n C_2 + \dots + n \cdot {}_n C_n$$

とんね 話をしますか？

(ちよとしたものの見方①)

$$\sum_{k=1}^n k \cdot {}_n C_k = 1 \cdot {}_n C_1 + 2 \cdot {}_n C_2 + \dots + n \cdot {}_n C_n$$

どんな話をしますか？

普通は

(解1) $(1+x)^n = {}_n C_0 + {}_n C_1 x + {}_n C_2 x^2 + \dots + {}_n C_n x^n$

微分して

$$n(1+x)^{n-1} = {}_n C_1 + 2{}_n C_2 x + 3{}_n C_3 x^2 + \dots + n{}_n C_n x^{n-1}$$

ここで $x=1$ を代入すると

$$\underline{n \cdot 2^{n-1} = {}_n C_1 + 2{}_n C_2 + \dots + n{}_n C_n}$$

$$S = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}$$

$$1 \cdot \binom{n}{1} + 2 \binom{n}{2} + 3 \binom{n}{3} + \dots + n \binom{n}{n}$$

(解2)

$$k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1} \quad \text{应用组合恒等式}$$

$$\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^n n \binom{n-1}{k-1}$$

$$= n \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1}$$

$$= n (\binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} + \dots + \binom{n-1}{n-1})$$

$$= n \cdot (1+1)^{n-1} = \underline{\underline{n \cdot 2^{n-1}}}$$

$$S = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}$$

(解3)

$$1 \cdot \binom{n}{1} + 2 \binom{n}{2} + 3 \binom{n}{3} + \dots + n \binom{n}{n}$$

$$\boxed{n \binom{n-1}{k-1} = k \binom{n}{k}}$$

且利用 $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$

$$S = \frac{n(\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n})}{2} = \frac{n \cdot 2^n}{2} = \boxed{n \cdot 2^{n-1}}$$

(打ち合わせが活用できてない)

$$\cdot \sum_{k=1}^n k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

$$\cdot \sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

知識はあるが活用できてない

活用問題として 何を出す?

...
(式を良く観察しようシリーズ)

$$\sum_{k=1}^7 (k-8)(k-9)(k-10)$$

$$= - \sum_{k=1}^7 (10-k)(9-k)(8-k)$$

$$= - \sum_{k=1}^7 k(k+1)(k+2)$$

$$= - \frac{1 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{4} = - \underline{\underline{1260}}$$

[数学の美]

これは美しい!

という話題, 教材を挙げてみて下さい!

(教員の手元に教材研究力)

?, ! しか感動は生まれたい

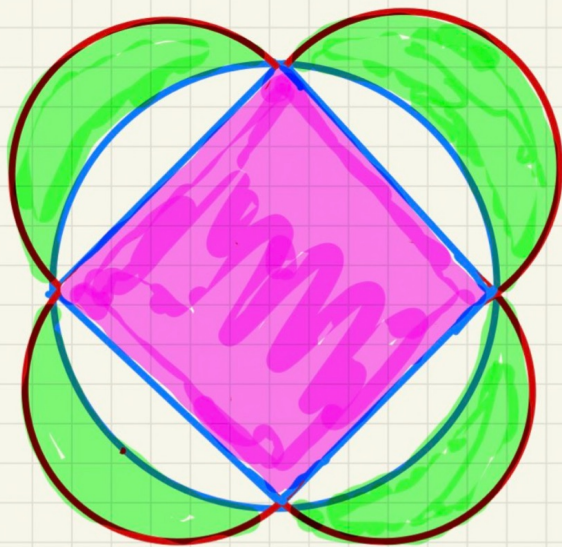
[日本 - 感動する計算?]

せふ. スマホで計算してみよう

													0	×	9	+	1	=																																
														1	×	9	+	2	=																															
														1	2	×	9	+	3	=																														
														1	2	3	×	9	+	4	=																													
														1	2	3	4	×	9	+	5	=																												
														1	2	3	4	5	×	9	+	6	=																											
														1	2	3	4	5	6	×	9	+	7	=																										
														1	2	3	4	5	6	7	×	9	+	8	=																									
														1	2	3	4	5	6	7	8	×	9	+	9	=																								
														1	2	3	4	5	6	7	8	9	×	9	+	10	=																							

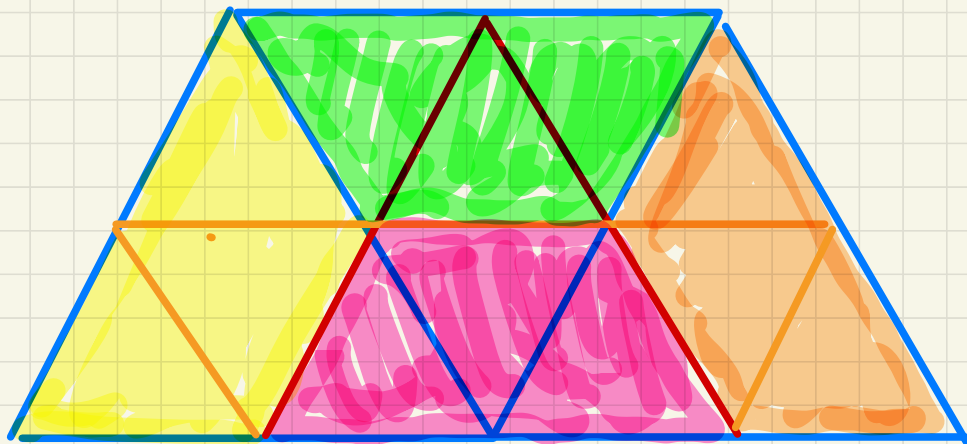
生徒の皆さんは「why?」を考えましょう!

[数学の美しさ]



緑 = ピンク

「解ける」感動よ! 「感じる」感性を!



$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

①, ③, ⑥, ⑩, ⑮, ⑰, ⑳, ㉓, ㉖, ... (三角数)

$$T_n = n^2$$

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, ... (四角数)



(理由を説明してみよう!)

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

$n \geq 2$

$$T_n = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1)$$

$$S_{n-1} + S_n = T_n \quad (n \geq 2)$$

$$(\text{②}) \quad S_n = \frac{n(n+1)}{2}, \quad T_n = n^2$$

$$S_{n-1} + S_n = \frac{(n-1)n}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2 - n + n^2 + n}{2} = n^2 = T_n$$

何かおかしなところある? $n \geq 2$?

[共通テスト 新傾向問題]

次の に入る数の和を求めよ

(P)

苦

苦

(R)

里

中

(S)

転

倒

(T)

人

色

(U)

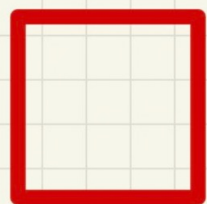
三

四

(たけちゃん 数学塾 入塾 試験問題)

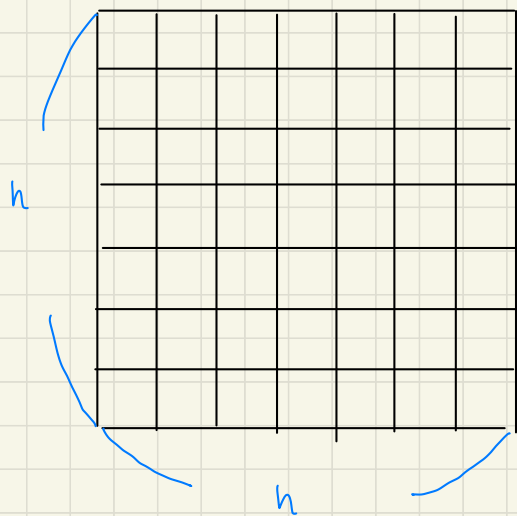
(不正 正解者. ない!)

$$i \times (9 + 9 + 9) \times \square = 18$$



には何が入るかね?

[意外に知られていない事実!]



$n \times n$ の正方形の中に
正方形はいくつあるか？

(平均 3兄弟の新事実)

$$\frac{2ab}{a+b}, \quad \sqrt{ab}, \quad \frac{a+b}{2}$$

(調和平均)

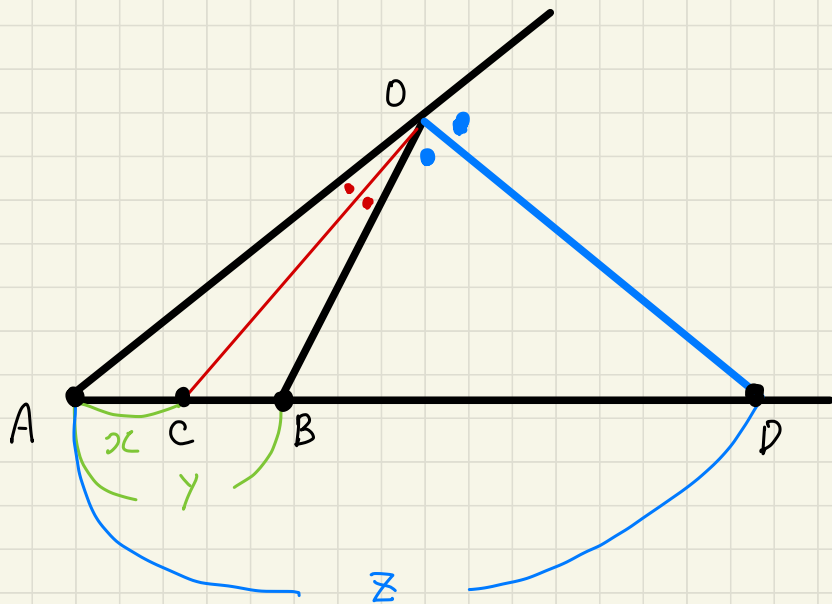
(相乗平均)

(相加平均)

→
等比数列であった!

[感心の事実シリーズ]

$$OA:OB = \underline{AC:CB = AD:DB}$$



$\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$ が

この順に等差数列

(x, y, z が調和数列)

↓

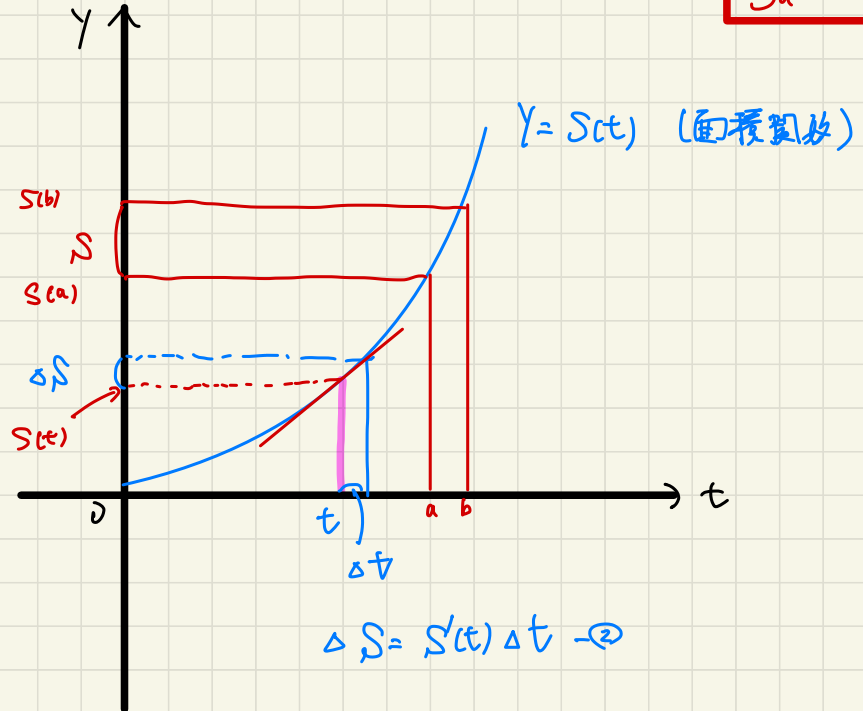
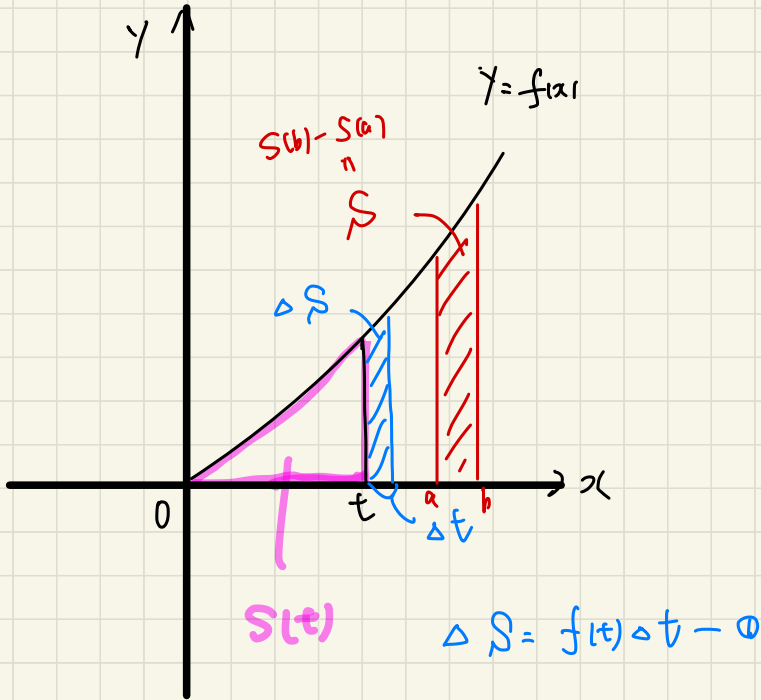
調和数列

[意味が分かる?]

①, ②より $f(t) \Delta t = S'(t) \Delta t \quad \therefore f(t) = S'(t)$

$$\begin{aligned}
 S &= S(b) - S(a) \\
 &= [S(t)]_a^b = \int_a^b S'(t) dt \\
 &= \int_a^b f(t) dt = \boxed{\int_a^b f(x) dx}
 \end{aligned}$$

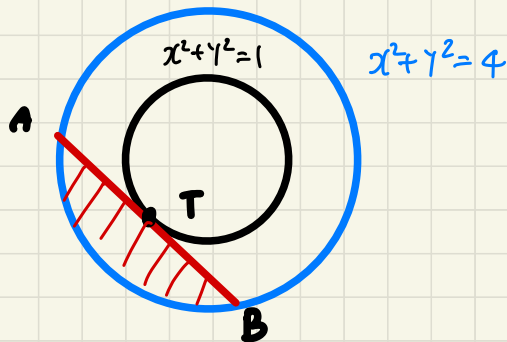
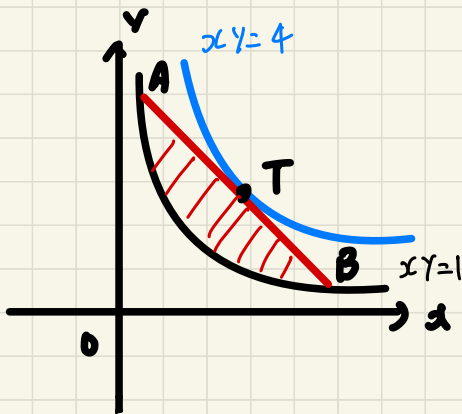
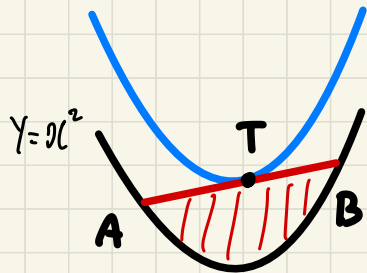
$\Delta t \rightarrow 0$



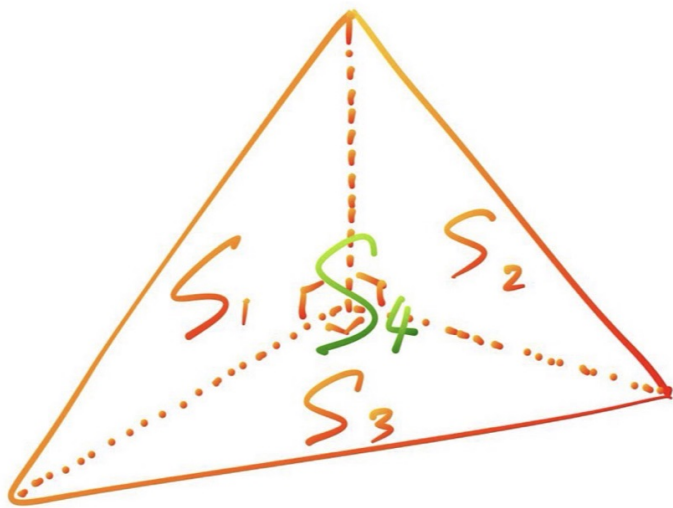
[2次曲線 3兄弟の隠れた秘密]

Tの位置によらず  の面積 = 一定

$$y = x^2 + 4$$

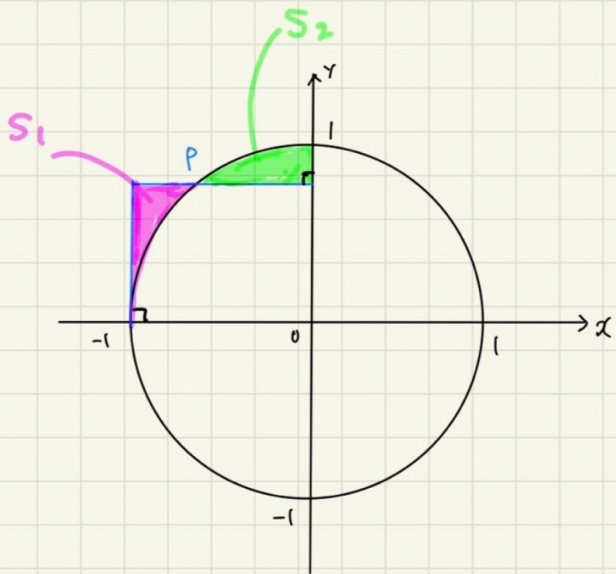


皆さんが良く「四平方の定理」と呼ぶ定理は
デカルト・ゴアの定理 といいます!



$$S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = S_4^2$$

[瞬殺数学] (3秒ルール)



左図のように $x^2 + y^2 = 1$ 上に

点 P があり

$S_1 = S_2$ が成り立つ

このとき P の座標を求めよ

[問題作りの背景]

[STEP①] (とてととのま,かた)

(浜学園の生徒の電車での会話)

3cm, 4cm, 5cm の直角三角形の内接円の

半径を求めよ

[STEP ②]

$(a, b, c) = (3, 4, 5), (5, 12, 13), (20, 21, 29)$ などのように

$a^2 + b^2 = c^2$ を満たし, a, b, c の最大公約数が 1 である

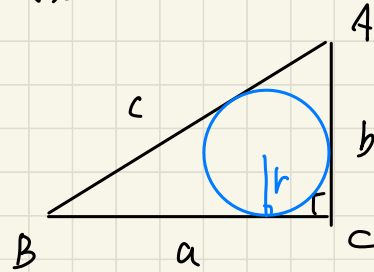
自然数の組を「既約ピタゴラス数」と呼ぶ.

今, 既約ピタゴラス数を 3 辺とする

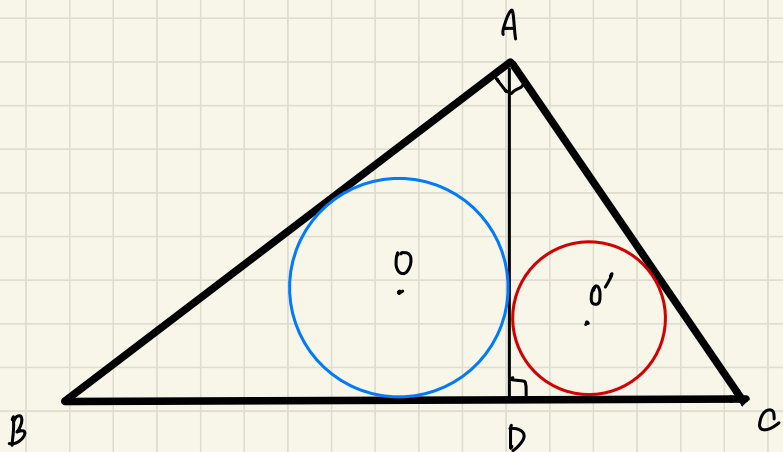
$\triangle ABC$ に内接する円の半径を r とすると

r は自然数である

ことを示せ.



[STEP③]



$\angle A = 90^\circ$ の直角三角形で

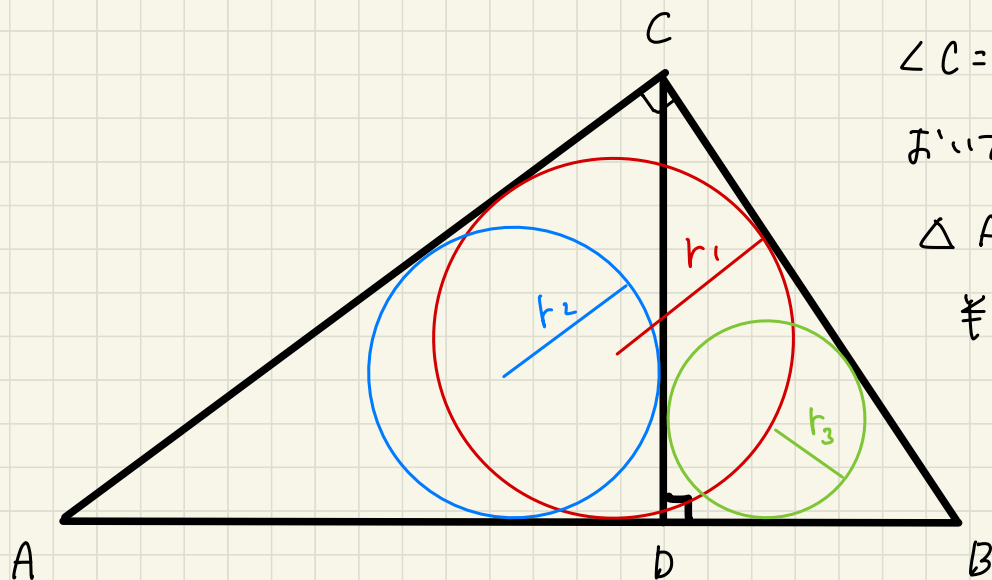
頂点 A から辺 BC に垂線 AD を引く

$\triangle ABD$ と $\triangle ACD$ に内接する 2 つの円

O, O' とする

O, O' の面積比は $BD:DC$ に等しい。

[STEP④] (最終形)



$\angle C = 90^\circ$ の直角三角形 ABC に
おいて C から AB に垂線 CD を下す
 $\triangle ABC$, $\triangle ACD$, $\triangle BCD$ の内接円の
半径を r_1, r_2, r_3 とするとき

$r_1 + r_2 + r_3 = CD$ が
成り立つことを示せ

【AIとの向き合い方】

① AIが教育に入ってくることは避けられない ⇒ **いかに共存するか？**

② $\left\{ \begin{array}{l} \text{人ができること} \\ \text{人にしかできないこと} \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} \text{AIができること} \\ \text{AIにしかできないこと} \end{array} \right.$

③ 人間らしさとは？ ⇒ **想ひ, 情熱**

④ AI時代に育成すべき力とは？ ⇒ **AIに優れる人間ではなく, AIに優れるにほず人材
間を立てる力**

⑤ AI時代の教師のあり方 (理想の教師像)

**教え方が上手い, 何でも相談に乗ってくれる ⇒ AIと対
人としての魅力, 大人としての魅力**

本日はありがとうございました。
貴校の益々のご発展と、皆様方のご健康とご活躍を
祈念しております。

名城大学 竹内英人

質問・ご意見は下記のアドレスまで遠慮なくどうぞ！

出前授業講義、教員研修等はお気軽にご連絡ください

takesuugak@gmail.com

入試問題を解くための **発想力** を伸ばす

解法の エウレカ

8/10
発売

INNOVATIVE APPROACH TO MATH PROBLEMS FOR ENTRANCE EXAMS

[数学 I・A]

名城大学

竹内 英人

河合塾、N予備校

小倉 悠司

HOW 解法 **WHY** 理由 **PIECE** 知識

ひらめくための **3要素** を知れば

入試問題は 簡単だ!

公式・解法を
使いこなす力が
身につく問題集



Gakken

こちらもお安くお譲いたします

