Heaviside の展開定理

面倒な分数関数になると，部分分数分解のやりかたがふと分からなくなってしまうことがよくあります。特に次数が高く、重解を持つとときは面倒ですね。

まずは部分分数分解についておさらいしておきましょう。分解したい分数関数を $F(x)$が、次のようにかけているとします。

$$F(x)=\frac{g(x)}{(x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{n_2}\cdots(x-a_k)^{n_k}}$$

このとき $F(x)$は次のように部分分数分解されます。

$$\begin{aligned}F(x)&=\frac{b_{1,n_1}}{(x-a_1)^{n_1}}+\frac{b_{1,n_1-1}}{(x-a_1)^{n_1-1}}+\cdots+\frac{b_{1,1}}{(x-a_1)}\\&+\frac{b_{2,n_2}}{(x-a_2)^{n_2}}+\frac{b_{2,n_2-1}}{(x-a_2)^{n_2-1}}+\cdots+\frac{b_{2,1}}{(x-a_2)}\\&+\cdots+\cdots\cdots+\cdots\\&+\frac{b_{k,n_k}}{(x-a_k)^{n_k}}+\frac{b_{k,n_k-1}}{(x-a_k)^{n_k-1}}+\cdots+\frac{b_{k,1}}{(x-a_k)}\end{aligned}$$

この分解したときの係数 b_{k,n_k} を求めることが問題になってきます。具体例をあげましょう。

例題 1 $\dfrac{7}{(x-2)(x+5)}$ を部分分数分解せよ。

（解 1） $\dfrac{7}{(x-2)(x+5)}=\dfrac{a}{x-2}+\dfrac{b}{x+5}$ とし、分母を払うと $7=a(x+5)+b(x-2)$ …①

$7=(a+b)x+5a-2b$ ∴ $a+b=0,\ 5a-2b=7$ ∴ $a=1,\ b=-1$

∴ $\dfrac{7}{(x-2)(x+5)}=\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x+5}$

（解 2） ①に $x=-5$ を代入すると、$7=-7b$ ∴ $b=-1$

①に $x=2$ を代入すると、$7=7a$ ∴ $a=1$ ■

例題 2 $\dfrac{1}{(x-2)^2(x-1)}$ を部分分数分解せよ。

（解 1） $\dfrac{1}{(x-2)^2(x-1)}=\dfrac{a}{(x-2)^2}+\dfrac{b}{x-2}+\dfrac{c}{x-1}$ ∴ $1=a(x-1)+b(x-2)(x-1)+c(x-2)^2$ …①

$1=(b+c)x^2+(a-3b-4c)x-a+2b+4c$ ∴ $b+c=0,\ a-3b-4c=0,\ -a+2b+4c=1$

∴ $a=1,\ b=-1,\ c=1$ ∴ $\dfrac{1}{(x-2)^2(x-1)}=\dfrac{1}{(x-2)^2}-\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x-1}$

（解 2） ①に $x=1$ を代入すると、$1=c$

①に $x=2$ を代入すると、$1=a$

②に $x=3$ を代入すると、$1=2a+2b+c$ ∴ $b=-1$

最後の解 2 では、①の両辺を微分して、$0=a+b(x-1)+b(x-2)+2c(x-2)$ として、$x=2$ を代入する方法が計算が楽です。

（解 2 変形）①の両辺を微分すると、 $0 = a + b(x-1) + b(x-2) + 2c(x-2)$ …②

②に $x = 2$ を代入すると、 $b = -1$ ■

微分を使うと展開することなく、計算が楽になりますね。
さて、これを「Heaviside の展開定理」というのを用いて求めてみましょう。

例題 1 $\dfrac{7}{(x-2)(x+5)}$ を部分分数分解せよ。

（解 3） $\dfrac{7}{(x-2)(x+5)} = \dfrac{a}{x-2} + \dfrac{b}{x+5}$

両辺に $x-2$ をかけると $\dfrac{7}{x+5} = a + \dfrac{b(x-2)}{x+5}$ …①

①に $x = 2$ を代入すると、$1 = a$

両辺に $x+5$ をかけると $\dfrac{7}{x-2} = \dfrac{a(x+5)}{x-2} + b$ …②

②に $x = -5$ を代入すると、$-1 = b$ ■

これでは大したありがたみがありませんね。もう一つの例題をやってみましょう。

例題 2 $\dfrac{1}{(x-2)^2(x-1)}$ を部分分数分解せよ。

（解 3） $\dfrac{1}{(x-2)^2(x-1)} = \dfrac{a}{(x-2)^2} + \dfrac{b}{x-2} + \dfrac{c}{x-1}$

両辺に $(x-2)^2$ をかけると $\dfrac{1}{x-1} = a + b(x-2) + \dfrac{c(x-2)^2}{x-1}$ …①

①に $x = 2$ を代入すると、$1 = a$

両辺に $x-1$ をかけると $\dfrac{1}{(x-2)^2} = \dfrac{a(x-1)}{(x-2)^2} + \dfrac{b(x-1)}{x-2} + c$ …②

②に $x = 1$ を代入すると、$1 = c$

①の両辺を x で微分すると、$\dfrac{-1}{(x-1)^2} = b + \dfrac{2c(x-2)(x-1) - c(x-2)^2}{(x-1)^2}$ …③

① の両辺に $x = 2$ を代入すると、$-1 = b$ ■

このように微分をうまく用いた方法が「Heaviside の展開定理」と呼ばれるものです。
例題 2 の別解 2 の変形で述べたように、そこで微分を使う方が楽かもしれませんね。