第 V 章

ペル方程式

この章ではペル方程式と呼ばれる $x^2 - Dy^2 = 1$ で表される方程式の解法を扱います。ペル方程式は長く魅惑的な歴史を持っています。記録のある最初のものは「アルキメデスの畜牛問題」です。この問題は「おお盟邦の友よ、ヘリオスの牛の群れを算（かぞ）え給え…」で始まる 22 の対句、44 行の詩の形で示されていて、最終的にペル方程式 $x^2 - 4729494y^2 = 1$ を解く問題に還元されます。

その後、ペル方程式を解く最初の重要な進展がインドでなされました。AD628 年頃に、ブラーフマグプタがペル方程式の既知の解を用いてどうやって新たな解を生み出すかを述べており、AD1150 年にはバースカラ 2 世が初期解を見つけるための巧妙な方法を与えました。

ペル方程式に関するヨーロッパでの歴史は 1657 年にフェルマーが彼の知人である数学者たちに対して方程式 $x^2 - 61y^2 = 1$ を解くように挑戦してきたときに始まります。数学者の何人かが最小の解 (1766319049,226153980) を見つけました。その後 1657 年に、ウィリアム・ブランカーがペル方程式を解く一般的な方法を与えました。しかし、オイラーはこの方程式を研究したのはジョン・ペルであると誤解し「ペル方程式」と命名したため、その名前が広く使われるようになったといわれています。

ウィリアム・ブランカー

1　ペル方程式

1.1　ペル方程式の定義

（定義）

平方数でない $d \in Z$ に対し、$x, y \in Z$ を未知とする方程式

$$x^2 - Dy^2 = 1 \quad (x + \sqrt{D}y > 0)$$

を**ペル方程式**という。

（補題）

(1) $x^2 - Dy^2 = 1$ を満たす任意の自然数解を (a, b) とすると、$(a + b\sqrt{D})^n = A + B\sqrt{D}$ で求まる (A, B) も $x^2 - Dy^2 = 1$ の解である。

(2) $x^2 - Dy^2 = 1$ を満たす自然数解の任意の 2 つを $(a, b), (c, d)$ とすると、$\dfrac{c + d\sqrt{D}}{a + b\sqrt{D}} = A + B\sqrt{D}$ で求まる (A, B) も $x^2 - Dy^2 = 1$ の解である。

（証明）(1) 帰納法で示す。(Ⅰ)$n = 1$ のときは明らか。

(Ⅱ)$n = k$ のとき、$A + B\sqrt{D}$ が解であるとする。

$n = k + 1$ のとき、$(a + b\sqrt{D})^{k+1} = (A + B\sqrt{D})(a + b\sqrt{D}) = Aa + BbD + (Ab + aB)\sqrt{D}$

$$(Aa + BbD)^2 - D(Ab + aB)^2 = a^2 - Db^2 = 1$$ $\therefore$ よって、$n = k + 1$ のときも解となる。

(2) $$\frac{c + d\sqrt{D}}{a + b\sqrt{D}} = \frac{(c + d\sqrt{D})(a - b\sqrt{D})}{a^2 - b^2 D} = \frac{(ac - bdD) + (ad - bc)\sqrt{D}}{a^2 - b^2 D}$$

$$\left(\frac{ac - bdD}{a^2 - b^2 D}\right)^2 - D\left(\frac{ad - bc}{a^2 - b^2 D}\right)^2 = \frac{(a^2 - b^2 D)(c^2 - d^2 D)}{(a^2 - b^2 D)^2} = c^2 - d^2 D = 1 \ ■$$

例題 1

方程式 $x^2 - 2y^2 = 1 \cdots (*)$ について、次の問いに答えよ。

(1) 方程式 $(*)$ の任意の解 (a, b) を見つけて、$(a + b\sqrt{2})^n = A + B\sqrt{2}$ で求まる (A, B) も $x^2 - 2y^2 = 1$ の解であることを $n = 2, 3$ について確認せよ。

(2) 方程式 $(*)$ の任意の 2 つの解 $(a, b), (c, d)$ を見つけて、$\dfrac{c + d\sqrt{2}}{a + b\sqrt{2}} = A + B\sqrt{2}$ で求まる (A, B) も $x^2 - 2y^2 = 1$ の解であることを確認せよ。

（解答）(1) $(a, b) = (3, 2)$

$(3 + 2\sqrt{2})^2 = 17 + 12\sqrt{2} \quad \therefore A = 17, B = 12 \quad A^2 - 2B^2 = 17^2 - 2 \cdot 12^2 = 289 - 288 = 1$

$(3 + 2\sqrt{2})^3 = 99 + 70\sqrt{2} \quad \therefore A = 99, B = 70 \quad A^2 - 2B^2 = 99^2 - 2 \cdot 70^2 = 9801 - 9800 = 1$

(2) $(a, b) = (3, 2), (17, 12) \quad \therefore a = 3, b = 2, c = 17, d = 12$

$$\frac{c + d\sqrt{2}}{a + b\sqrt{2}} = \frac{17 + 12\sqrt{2}}{3 + 2\sqrt{2}} = 3 + 2\sqrt{2} \quad \therefore A = 3, B = 2 \quad A^2 - 2B^2 = 3^2 - 2 \cdot 2^2 = 9 - 8 = 1 \ ■$$

【問題 1】　方程式 $x^2 - 3y^2 = 1 \cdots (*)$ について、次の問いに答えよ。

(1) 方程式 $(*)$ の任意の解 (a, b) を見つけて、$(a + b\sqrt{3})^n = A + B\sqrt{3}$ で求まる (A, B) も $x^2 - 3y^2 = 1$ の解であることを $n = 2, 3$ について確認せよ。

(2) 方程式 $(*)$ の任意の 2 つの解 $(a, b), (c, d)$ を見つけて、$\dfrac{c + d\sqrt{3}}{a + b\sqrt{3}} = A + B\sqrt{3}$ で求まる (A, B) も $x^2 - 3y^2 = 1$ の解であることを確認せよ。

1.2　ペル方程式の一般解

（定理）ペル方程式の一般解

$x^2-Dy^2=1$ を満たす自然数解のうちで $x+y\sqrt{D}$ の値を最小とするものを (p,q) とする。このとき、$(p+q\sqrt{D})^n=\alpha+\beta\sqrt{D}$ で求まる (α,β) が自然数解のすべてである。つまり、

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p&Dq\\q&p\end{pmatrix}^n\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

（証明）(p,q) が $x^2-Dy^2=1$ の解であるので、$(p+q\sqrt{D})^n=\alpha+\beta\sqrt{D}$ で定まる (α,β) も $x^2-Dy^2=1$ の解となる。$x^2-Dy^2=1$ の任意の解を (s,t) とすると、ある自然数について、

$$(p+q\sqrt{D})^n\leqq s+t\sqrt{D}\leqq(p+q\sqrt{D})^{n+1}\quad\therefore 1\leqq\frac{s+t\sqrt{D}}{(p+q\sqrt{D})^n}\leqq p+q\sqrt{D}$$

$p+q\sqrt{D}$ は最小なので、$\dfrac{s+t\sqrt{D}}{(p+q\sqrt{D})^n}=u+v\sqrt{D}$ で定まる (u,v) も $x^2-Dy^2=1$ を満たす。

$$\therefore u+v\sqrt{D}=\frac{s+t\sqrt{D}}{(p+q\sqrt{D})^n}=1\quad\therefore s+t\sqrt{D}=(p+q\sqrt{D})^n\ ■$$

例題 2

方程式 $x^2-2y^2=1$ の一般解を求めよ。

（解答）最小解は明らかに $(p,q)=(3,2)$　よって一般解は

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&4\\2&3\end{pmatrix}^n\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\quad\left(A=\begin{pmatrix}3&4\\2&3\end{pmatrix}\right)$$

ここで A^n を求める。

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}3-\lambda&4\\2&3-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-6\lambda+1=0\quad\therefore\lambda=3\pm2\sqrt{2}$$

① $\lambda=3+2\sqrt{2}$ のとき、$x=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ とすると、$(A-\lambda E)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\sqrt{2}&4\\2&-2\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\sqrt{2}x+4y\\2x-2\sqrt{2}y\end{pmatrix}=O$

$$\therefore x=\sqrt{2}y\quad\therefore\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{2}s\\s\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}$$

② $\lambda=3-2\sqrt{2}$ のとき、$x=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ とすると、$(A-\lambda E)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\sqrt{2}&4\\2&2\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\sqrt{2}x+4y\\2x+2\sqrt{2}y\end{pmatrix}=O$

$$\therefore x=-\sqrt{2}y\quad\therefore\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{2}t\\-t\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\-1\end{pmatrix}$$

$P=\begin{pmatrix}\sqrt{2}&\sqrt{2}\\1&-1\end{pmatrix}$ とおくと、$P^{-1}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&\sqrt{2}\\1&-\sqrt{2}\end{pmatrix}$

$$\therefore P^{-1}AP=\frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&\sqrt{2}\\1&-\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&4\\2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{2}&\sqrt{2}\\1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3+2\sqrt{2}&0\\0&3-2\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

$$\therefore(P^{-1}AP)^n=\begin{pmatrix}(3+2\sqrt{2})^n&0\\0&(3-2\sqrt{2})^n\end{pmatrix}\quad\therefore A^n=P\begin{pmatrix}(3+2\sqrt{2})^n&0\\0&(3-2\sqrt{2})^n\end{pmatrix}P^{-1}$$

$$\therefore A^n=\begin{pmatrix}\sqrt{2}&\sqrt{2}\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(3+2\sqrt{2})^n&0\\0&(3-2\sqrt{2})^n\end{pmatrix}\frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&\sqrt{2}\\1&-\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\dfrac{(3+2\sqrt{2})^n+(3-2\sqrt{2})^n}{2}&\dfrac{(3+2\sqrt{2})^n-(3-2\sqrt{2})^n}{\sqrt{2}}\\\dfrac{(3+2\sqrt{2})^n-(3-2\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}}&\dfrac{(3+2\sqrt{2})^n+(3-2\sqrt{2})^n}{2}\end{pmatrix}$$

$$\therefore x=\frac{(3+2\sqrt{2})^n+(3-2\sqrt{2})^n}{2},y=\frac{(3+2\sqrt{2})^n-(3-2\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}}$$

$$\therefore\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}17\\12\end{pmatrix},\begin{pmatrix}99\\70\end{pmatrix},\begin{pmatrix}577\\408\end{pmatrix},\cdots\ ■$$

【問題 2】方程式 $x^2-3y^2=1$ の一般解を求めよ。

練習問題

$\boxed{1}$ 次の方程式の一般解を求めよ。

(1) $x^2-8y^2=1$ (2) $x^2-15y^2\ 1$

$\boxed{2}$ (95 大阪府立大)

$A=\begin{pmatrix}2&3\\1&2\end{pmatrix}$ に対して、$\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}(n=1,2,3,\cdots)$ とする。次の問いに答えよ。

(1) x_n と y_n を求めよ。

(2) $a=2+\sqrt{3},b=2-\sqrt{3}$ とおく。a^n と b^n を x_n,y_n を用いて表せ．また，点

$$P_1(x_1,y_1),P_2(x_2,y_2),P_3(x_3,y_3),\cdots,P_n(x_n,y_n),\cdots$$

は全て同じ曲線上にある。$ab=1$ が成り立つことを利用して、その曲線の方程式を求めよ。

$\boxed{3}$ (95 明治大学)

$A=\begin{pmatrix}2&3\\1&2\end{pmatrix}$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) ベクトル $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ に対し，$\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ とおく。$x^2-3y^2=1$ ならば $x_1^2-3y_1^2=1$ であることを示せ。

(2) 等式 $x^2-3y^2=1$ をみたす正の整数 x,y に対して，$\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ とおけば，$y>y_1\geqq 0$ が成り立つことを示せ。

(3) 数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ を $\begin{pmatrix}a_n\\b_n\end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}(n=1,2,3,\cdots)$ によって定めると，等式 $(2+\sqrt{3})^n=a_n+b_n\sqrt{3}(n=1,2,\cdots)$ が成り立つことを示せ。

(4) 等式 $x^2-3y^2=1$ を満たす正の整数の組 (x,y) は (3) で与えられた整数の組 $(a_n,b_n)(n=1,2,\cdots)$ のどれかに等しいことを証明せよ。

$\boxed{4}$ (85 東京工業大学) 二つの条件

$$\text{(i)}a^2-2b^2=1 \text{ または } a^2-2b^2=-1 \qquad \text{(ii)}a+\sqrt{2}>0$$

をみたす任意の整数 a,b から得られる実数 $g=a+\sqrt{2}b$ 全体の集合を G とする．1 より大きい G の元のうち最小のものを u とする。

(1) u を求めよ。

(2) 整数 n と G の元 g に対し, gu^n は G の元であることを示せ。

(3) G の任意の元 g は適当な整数 m によって, $g=u^m$ と書かれることを示せ。

2　ペル方程式の解の存在

2.1　ディリクレの原理

（定理）ディリクレの原理（鳩の巣原理、部屋割り論法）

(1) n 人の人を k 個の部屋に入れることを考える（$n,k \in Z$）。n を k で割った商を q、余りを r とおく。もし,$r>0$ ならば少なくとも 1 つ q 人より多くの人が入った部屋が存在する。

(2) $a_i \in Z(i=1,2,\cdots)$ は $1 \leqq a_1,a_2,\cdots,a_n \leqq n$ を満たし、全て異なるとする。このとき、$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 1〜n の値を 1 個ずつとる。

（証明）(1) もしどの部屋も q 人以下なら、合計人数は qk 人以下となり、$n-qk=r>0$ に反する。
(2) $a_1,a_2,\cdots,a_n$ の中に、1〜n で取らない値があるとする。その値を除く数を記した箱を用意する。箱の数は $n-1$ 以下となる。数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ をその値にしたがってこれらの箱に入れる。(1) によって、同じ箱に入るものが少なくとも 1 つ存在する。　■

例題 3

(1) 19 以下の自然数から、7 個の数を適当に選ぶ。この 7 個の数の中から、いくつかの相異なる数の組を 2 組選んで、その和を等しくすることができることを示せ。

(2) 1 から 50 までの整数の中から相異なる 26 個の数をどのように選んでも、和が 51 になる 2 つの数の組が必ず含まれていることを示せ。

（解答）(1) 7 個の数の中から、いくつかの相異なる数を選んで組を作るとき、その作り方は、$2^7-1=127$ 通りある。また、そのような組の中で、
　和が最大となるものは、$19+18+17+16+15+14+13=112$, 和が最小となるものは、1
である。したがって、和のとり得る値は、$1,2,3,\cdots,112$
よって、鳩ノ巣原理により、和が等しくなる組が少なくとも 2 つ存在する。
(2) 和が 51 になる 2 つの数の組は、次の 25 組ある。

$$(1,50),(2,49),(3,48),\cdots,(25,26)$$

選んだ 26 個の数をこの 25 組に入れると、2 組入る組が少なくとも 1 つある。つまり、和が 51 になる 2 つの数の組が必ず含まれている。■

【問題 3-1】3 で割って 1 余る数の数列 $1,4,7,\cdots,97,100$ を考える。この 34 個の数から相異なる 20 個の数をどのように選んでも必ず、その 20 個の中に、2 つの相異なる数で、和が 104 となるものが存在する。

【問題 3-2】異なる $n+1$ 個の自然数がある。その中に自然数の差が n で割り切れるような組が少なくとも 1 組存在することを示せ。
（ヒント：自然数を n で割った余りは $0,1,2,\cdots,n-1$ の n 通りで、これを n 個の部屋と考える。そして、異なる $n+1$ 個の自然数を $n+1$ 人と考えると、2 人以上入っている部屋が少なくとも 1 室ある。すなわち、n で割ったときの余りが等しい自然数が少なくとも 2 個ある。）

2.2 ディオファントスの近似定理

（定理）ディオファントスの近似定理

ω を無理数とする。$|x-\omega y| < \dfrac{1}{y}$ となる $x, y \in Z$ が無数に存在する。

（証明）(i) 任意の自然数 n に対し、$0 < y \leqq n, |x-\omega y| < \dfrac{1}{n}$ となる整数 (x, y) が少なくとも 1 組存在することを示す。区間 $[0, 1)$ を n 等分する。

$$\left[0, \frac{1}{n}\right), \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right), \left[\frac{2}{n}, \frac{3}{n}\right), \cdots, \left[\frac{n-1}{n}, 1\right) \cdots (*)$$

$y = 0, 1, 2, \cdots, n$ として、y に対して $x = [\omega y]$ とする。このとき、$0 \leqq \omega y - x < 1$

y は全部で $n+1$ 個あるので、鳩ノ巣原理によって (*) の n 個の中に少なくとも 1 つの区間には、2 つ以上の $\omega y - x$ が属する。$\omega y_1 - x_1, \omega y_2 - x_2 (x_1 \neq x_2)$ が同じ区間に属するとすると、

$$|(\omega y_1 - x_1) - (\omega y_2 - x_2)| < \frac{1}{n}$$

$y_1 > y_2$ として、$x = x_1 - x_2, y = y_1 - y_2$ とおくと、

$$|\omega y - x| < \frac{1}{n} \cdots (**)$$

(ii) (**) において n を動かすとき、(x, y) の中に相異なるものが無数に存在することを示す。もし、有限個しかないとすると、その中で $|\omega y - x|$ の値が最小なものが存在するので、それを $|\omega y_0 - x_0|$ とする。その (x_0, y_0) に対して、$\dfrac{1}{n} < |\omega y_0 - x_0|$ となる n をとる。この n に対して再び $|\omega y - x| < \dfrac{1}{n}$ となるように (x, y) を選ぶことができる。しかし、$|\omega y - x| < \dfrac{1}{n} < |\omega y_0 - x_0|$ となり、(x_0, y_0) の最小性に矛盾する。よって、相異なるものが無数に存在する。$|\omega y - x| < \dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{y}$ より、$|\omega y - x| < \dfrac{1}{y}$ ■

例題 4

$\left|x - \sqrt{13}y\right| < \dfrac{1}{y}$ となる (x, y) を求めよ。ただし、y の値を 1〜10 までの整数として、x は $\sqrt{13}y$ に最も近い数を選べ。

（解答）

x	y	$\left\|x - y\sqrt{13}\right\|$	$1/y$	TF
4	1	0.394449	1.000000	T
7	2	0.211103	0.500000	T
11	3	0.183346	0.333333	T
14	4	0.422205	0.250000	F
18	5	0.027756	0.200000	T
22	6	0.366692	0.166667	F
25	7	0.238859	0.142857	F
29	8	0.155590	0.125000	F
32	9	0.449961	0.111111	F
36	10	0.055513	0.100000	T

よって、$(x, y) = (4, 1), (7, 2), (11, 3), (18, 5), (36, 10)$ ■

【問題 4】$\left|x - \sqrt{11}y\right| < \dfrac{1}{y}$ となる (x, y) を求めよ。ただし、y の値を 1〜10 までの整数として、x は $\sqrt{11}y$ に最も近い数を選べ。

2.3 ペル方程式の解の存在

（定理）ペル方程式の解の存在

$0 < D \in Z$、$\sqrt{D}$ を無理数とする。$x^2 - Dy^2 = 1$ は自明でない整数解 $(X, Y) \in Z^2$ を持つ。

（証明）$\left|x - \sqrt{D}y\right| < \dfrac{1}{y}$ となる $x, y > 0$ が無数に存在する。

$$-\frac{1}{y} < x - \sqrt{D}y < \frac{1}{y} \qquad 2\sqrt{D} \text{ を加えて、} x + \sqrt{D}y < \frac{1}{y} + 2\sqrt{D}y$$

$0 < \left|x - \sqrt{D}y\right| < \dfrac{1}{y}$ をかけると、$y \geqq 1$ より

$$\left|x^2 - dy^2\right| < \frac{1}{y^2} + 2\sqrt{D} \leqq 1 + 2\sqrt{D} \qquad \therefore\ -(1 + 2\sqrt{D}) \leqq x^2 - Dy^2 \leqq 1 + 2\sqrt{D}$$

$x^2 - Dy^2$ は $-(1 + 2\sqrt{D})$ と $1 + 2\sqrt{D}$ の間の有限個の整数のいくつかと一致する。しかし、(x, y) は無数にあるので、少なくとも 1 つの整数 l に対して、

$$x^2 - Dy^2 = l \cdots (*)$$

が成り立つ。整数を l の剰余系で分類すると l 組存在する。よって、整数の組 (x, y) は l^2 個の有限個に分類される。しかし、整数の組 (x, y) は無数に存在するので、分類された組には無数の (x, y) が属する。$(s, t), (u, v)$ が同一の組に属するとする。$\begin{cases} u = s + kl \\ v = t + hl \end{cases}$ とすると、

$$tu - sv = t(s + kl) - s(t + hl) = (kl - hs)l = Yl \qquad (Y = kl - hs)$$

一方、$(s, t), (u, v)$ は (*) を満たすので、

$$l^2 = (s^2 - Dt^2)(u^2 - Dv^2) = (su - Dtv)^2 - (sv - tu)^2 D = (su - Dtv)^2 - DY^2 l^2$$

$$\therefore\ (su - Dtv)^2 = l^2(DY^+1)$$

よって $(su - Dtv)^2$ は l^2 で割り切れる。つまり、$su - Dtv$ は l で割り切れる。

$$\therefore\ su - Dtv = Xl \quad \therefore\ (Xl)^2 - D(Yl)^2 = l^2 \quad \therefore\ X^2 - DY^2 = 1$$

よって (X, Y) は $x^2 - Dy^2 = 1$ の解である。 ■

練習問題

$\boxed{1}$　1 辺の長さが 2 の正方形の内部に任意の 5 つの点をとったとき、その中のある 2 点は距離が 1 より小さい。

$\boxed{2}$　座標平面上に任意の 5 つの格子点があり、これらを結ぶすべての線分を考える。このとき、これらの線分の中点のうち少なくとも 1 つは格子点であることを証明せよ。

$\boxed{3}$　以下の各 y について、$\left|x - y\sqrt{2}\right| < \dfrac{1}{y}$ を満たす $x \in Z$ を求めよ。

$$y = 12, 17, 29, 41, 79, 169, 239, 408, 577$$

$\boxed{4}$　20 以下の $y \in N$ について、$|x - y\phi|$ の値をできる限り小さくする $x \in Z$ を求めよ。ただし、$\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ とする。

3　ペル方程式の解の構成

3.1　ペル方程式の解の構成定理 1

これまでペル方程式の最小解がわかれば、一般解が求まることを見てきた。下の表はペル方程式の最小解を表したものである。これをみると例えば $D=61$ のときの最小解は $x=1766319049, y=226153980$ と簡単には求めることができないものも多く存在する。

ではペル方程式の最小解を求めるにはどうしたらよいのであろうか。

D	x	y	D	x	y	D	x	y	D	x	y
2	3	2	22	197	42	42	13	2	62	63	8
3	2	1	23	24	5	43	3482	531	63	8	1
4	FALSE	FALSE	24	5	1	44	199	30	64	FALSE	FALSE
5	9	4	25	FALSE	FALSE	45	161	24	65	129	16
6	5	2	26	51	10	46	24335	3588	66	65	8
7	8	3	27	26	5	47	48	7	67	48842	5967
8	3	1	28	127	24	48	7	1	68	33	4
9	FALSE	FALSE	29	9801	1820	49	FALSE	FALSE	69	7775	936
10	19	6	30	11	2	50	99	14	70	251	30
11	10	3	31	1520	273	51	50	7	71	3480	413
12	7	2	32	17	3	52	649	90	72	17	2
13	649	180	33	23	4	53	66249	9100	73	2281249	267000
14	15	4	34	35	6	54	485	66	74	3699	430
15	4	1	35	6	1	55	89	12	75	26	3
16	FALSE	FALSE	36	FALSE	FALSE	56	15	2	76	57799	6630
17	33	8	37	73	12	57	151	20	77	351	40
18	17	4	38	37	6	58	19603	2574	78	53	6
19	170	39	39	25	4	59	530	69	79	80	9
20	9	2	40	19	3	60	31	4	80	9	1
21	55	12	41	2049	320	61	1766319049	226153980	81	FALSE	FALSE

ペル方程式の最小解

（定理）ペル方程式の解の構成定理 1

$D \in Z$ は平方数でないとする。$\sqrt{D}$ の連分数展開の周期を l とする。

(1) l が奇数のとき

(i) 正の偶数 m に対して、$(x,y)=(p_{ml-1}, q_{ml-1})$ は $x^2-Dy^2=1$ の解である。

(ii) 正の奇数 m に対して、$(x,y)=(p_{ml-1}, q_{ml-1})$ は $x^2-Dy^2=-1$ の解である。

(2) l が偶数のとき

正の数 m に対して、$(x,y)=(p_{ml-1}, q_{ml-1})$ は $x^2-Dy^2=1$ の解である。

（証明）$\sqrt{D}=\begin{pmatrix} c_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x_1$　$(c_0=[\sqrt{D}])$ とすると、$x_1>1, -1<x_1'<0$　(x_1' は x_1 の共役元)

$$
\begin{aligned}
\sqrt{D} &= \begin{pmatrix} c_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x_1 \\
&= \begin{pmatrix} c_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} c_l & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x_{l+1} = \begin{pmatrix} c_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} c_l & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x_1 = \begin{pmatrix} p_l & p_{l-1} \\ q_l & q_{l-1} \end{pmatrix} x_1
\end{aligned}
$$

ここで、$\begin{pmatrix} c_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} c_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} c_l & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)^m = \begin{pmatrix} p_{ml} & p_{ml-1} \\ q_{ml} & q_{ml-1} \end{pmatrix}$ とおくと、

$$
\sqrt{D} = \begin{pmatrix} p_l & p_{l-1} \\ q_l & q_{l-1} \end{pmatrix} x_1 = \begin{pmatrix} p_{2l} & p_{2l-1} \\ q_{2l} & q_{2l-1} \end{pmatrix} x_1 = \cdots = \begin{pmatrix} p_{ml} & p_{ml-1} \\ q_{ml} & q_{ml-1} \end{pmatrix} x_1
$$

$\sqrt{D}=\begin{pmatrix} c_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x_1$ より、$x_1=\begin{pmatrix} c_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}\sqrt{D}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -c_0 \end{pmatrix}\sqrt{D}$　よって、

$$
\begin{aligned}
\sqrt{D} &= \begin{pmatrix} p_{ml} & p_{ml-1} \\ q_{ml} & q_{ml-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -c_0 \end{pmatrix}\sqrt{D} = \begin{pmatrix} p_{ml-1} & p_{ml}-c_0p_{ml-1} \\ q_{ml-1} & q_{ml}-c_0q_{ml-1} \end{pmatrix}\sqrt{D} \\
&= \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}\sqrt{D} \qquad \begin{pmatrix} p=p_{ml-1} & q=p_{ml}-c_0p_{ml-1} \\ r=q_{ml-1} & s=q_mk-c_0q_{ml-1} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$= \frac{p+\sqrt{D}+q}{r\sqrt{D}+s}$$

$$\therefore\ rD-q+(s-p)\sqrt{D}=0 \qquad \therefore\ rD-q=s-p=0 \qquad \therefore\ p^2-Dr^2=ps-rq=\begin{vmatrix} p & q \\ r & s \end{vmatrix}$$

$$\therefore\ p_{ml-1}^2-Dq_{ml-1}^2=\begin{vmatrix} p_{ml} & p_{ml-1} \\ q_{ml} & q_{ml-1} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -c_0 \end{vmatrix}=(p_{ml}q_{ml-1}-p_{ml-1}q_{ml})\cdot(-1)$$

$$=(-1)^{ml+1}\cdot(-1)=(-1)^{ml}$$

よって、l が奇数のとき、

(i) 正の偶数 m に対して、$(x,y)=(p_{ml-1},q_{ml-1})$ は $x^2-Dy^2=1$ の解である。

(ii) 正の奇数 m に対して、$(x,y)=(p_{ml-1},q_{ml-1})$ は $x^2-Dy^2=-1$ の解である。

l が偶数のとき、正の数 m に対して、$(x,y)=(p_{ml-1},q_{ml-1})$ は $x^2-Dy^2=1$ の解である。 ■

例題 5

方程式 $x^2-13y^2=\pm1$ の最小解を求めよ。

（解答） $\sqrt{13}=[3,\overline{1,1,1,1,6}]$ $\quad l=5 \quad$ l は奇数なので、$5m-1$ に $m=1,2$ を代入して、4,9

$$\begin{pmatrix} p_4 \\ q_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 18 & 11 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 18 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} p_9 \\ q_9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 18 & 11 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 649 & 393 \\ 180 & 109 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 640 \\ 180 \end{pmatrix}$$

$(x,y)=(p_4,q_4)=(18,5)$ が $x^2-13y^2=-1$ の解

$(x,y)=(p_9,q_9)=(640,180)$ が $x^2-13y^2=1$ の解 ■

ここで (p_4,q_4) に対して、(p_9,q_9) はその次の解になる。

$\therefore\ (p_4+\sqrt{13}p_4)^2=p_9+\sqrt{13}q_9 \quad \therefore\ (184+5\sqrt{13})^2=640+180\sqrt{13}$

【問題 5】次の方程式の最小解を求めよ。

(1) $x^2-11y^2=1$ (2) $x^2-41y^2=\pm1$

(3) $x^2-34y^2=1$ (4) $x^2-53y^2=\pm1$

3.2 ペル方程式の解の構成定理 2

（定理）ペル方程式の解の構成定理 2

$D \in Z$ は平方数でないとする。$\sqrt{D}$ の連分数展開の周期を l とする。

$x^2 - Dy^2 = \pm 1$ の解で、$x + \sqrt{D} > 1$ であるものは $\sqrt{D}$ の連分数展開で得られる (p_{ml-1}, q_{ml-1}) で尽くされる。

（証明）$x + \sqrt{D}y > 1$ である任意の解を (x_1, y_1) とする。$x_1^2 - Dy_1^2 = \pm 1$ すなわち $\begin{vmatrix} x_1 & Dy_1 \\ y_1 & x_1 \end{vmatrix} = \pm 1$

$x + \sqrt{D}y > 1$ であるので、$x_1 > 0, y_1 > 0$

ここで、$\sqrt{D} = \begin{pmatrix} c_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\theta$ とおく。ただし、$\theta > 1, -1 < \theta' < 0$ （θ' は θ の共役元）

$\begin{pmatrix} x_1 & Dy_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix}\sqrt{D} = \dfrac{\sqrt{D} + Dy_1}{\sqrt{D}y_1 + x_1} = \sqrt{D}$ に代入すると、$\begin{pmatrix} x_1 & Dy_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\theta = \begin{pmatrix} c_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\theta$

$$\therefore\ \theta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -c_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & Dy_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\theta = \begin{pmatrix} y_1 & x_1 \\ x_1 - c_0 y_1 & Dy_1 - c_0 x_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\theta$$

$$= \begin{pmatrix} c_0 y_1 + x_1 & y_1 \\ (D - c_0^2)y_1 & x_1 - c_0 y_1 \end{pmatrix}\theta = \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix}\theta \quad \begin{pmatrix} P = c_0 y_1 + x_1 & Q = y_1 \\ R = (D - c_0^2)y_1 & S = x_1 - c_0 y_1 \end{pmatrix}$$

$\begin{vmatrix} x_1 & Dy_1 \\ y_1 & x_1 \end{vmatrix} = \pm 1$ なので、$PS - QR = \pm 1$ である。

ここで、$PS - QR = e, \epsilon = R\theta + S, \epsilon' = R\theta' + S$ とおく。

$R = (D - c_0^2)y_1 > 0, s = x_1 - c_0 y_1 > x_1 - \sqrt{D}y_1 = \dfrac{\pm 1}{x_1 + \sqrt{D}y_1} > -1$ また $\theta > 1$ であるから、$\epsilon > 1$

また、$\theta\theta'$ は $t = \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix}t$ すなわち、$Rt^2 + (S - T)t - Q = 0$ の 2 つの解であるから、

$$\epsilon\epsilon' = R^2\theta\theta' + (\theta + \theta')RS + S^2 = R^2\frac{(-Q)}{R} - \frac{(S - P)}{R} + S^2 = -QR - S^2 + PS + S^2 = e = \pm 1$$

$\therefore\ |\epsilon'| < 1$　さらに、$S > R\theta' + S > -R + S,\ S > \epsilon' > -R + S$

$\therefore$ (i) $\epsilon\epsilon' = 1(e = 1)$ のとき、$1 > \epsilon' > 0 \quad \therefore R \geqq S \geqq 0$

(ii) $\epsilon\epsilon' = -1(e = -1)$ のとき、$0 > \epsilon' > -1 \quad \therefore R > S \geqq 0$

(1) $R > S > 0$ のとき、$\begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix}\theta$ は θ の連分数展開から得られる。

(2) $R = S(e = 1)$ のとき、$PS - QR = 1$ より、$(P - Q)R = 1, R > 0$ なので $P - Q = 1, R = 1$

$$\theta = \frac{(Q + 1)\theta + Q}{\theta + 1} = \begin{pmatrix} P & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\theta$$

(3) $S = 0(e = -1)$ のとき、$PS - QR = -1, QR = 1$ より、$R > 0$ なので $Q = R = 1$

$$\theta = \frac{P\theta + 1}{\theta} = \begin{pmatrix} P & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\theta$$

(1)(2)(3) いずれの場合も $\begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix}\theta$ は θ 自信の連分数の中に現れる。

よって $\sqrt{D} = \begin{pmatrix} c_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\theta = \begin{pmatrix} c_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix}\theta$ は連分数展開である。

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -c_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & Dy_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\theta = \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix}\theta$ であるから、

$$\sqrt{D} = \begin{pmatrix} x_1 & Dy_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_0 & Q \\ R & S \end{pmatrix}\theta = \begin{pmatrix} x_1 c_0 + Dy_1 & x_1 \\ y_1 c_0 + x_1 & y_1 \end{pmatrix}\theta = \begin{pmatrix} p_h & p_{h-1} \\ q_h & q_{h-1} \end{pmatrix}\theta \quad \begin{pmatrix} p_h = x_1 c_0 + Dy_1 & p_{h-1} = x_1 \\ q_h = y_1 c_0 + x_1 & q_{h-1} = y_1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore\ \sqrt{D} = \begin{pmatrix} c_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\theta = \begin{pmatrix} p_h & p_{h-1} \\ q_h & q_{h-1} \end{pmatrix}\theta$$

よって、h は周期 l の倍数になる。つまり、ある整数 m によって、$h = ml$ となる。

したがって、$x_1 = p_{ml-1}, y_1 = q_{ml-1}$ ■

練習問題

$\boxed{1}$ 次の方程式の最小解を求めよ。

(1) $x^2-5y^2=1$ (2) $x^2-7y^2=1$

(3) $x^2-19y^2=\pm 1$

$\boxed{2}$ 方程式 $x^2-3y^2=-1$ の整数解は存在しないことを示せ。

$\boxed{3}$ (98 お茶の水女子大)

(1) 等式 $(x^2-ny^2)(z^2-nt^2)=(xz+nyt)^2-n(xt+yz)^2$ を示せ。

(2) $x^2-2y^2=-1$ の自然数解 (x,y) が無限組あることを示し，$x>100$ となる解を一組求めよ。

$\boxed{4}$ (01 滋賀医大)

平面上の 2 曲線 C_+ と C_- を次の式で定義する。

$$C_+ : x^2-2y^2=1(x>0,y>0) \qquad C_- : x^2-2y^2=-1(x>0,y>0)$$

また，点 $P(x,y)$ に対して点 $Q(u,v)$ を次式で定める。

$$u=-x+2y, v=x-y$$

点 $P(x,y)$ は x,y がともに整数であるとき整数点という。

(1) 点 $P(x,y)$ が曲線 C_+ 上の整数点ならば $Q(u,v)$ は曲線 C_- 上の整数点であり，$P(x,y)$ が曲線 C_- 上の整数点ならば $x-y=1$ の場合を除いて，$Q(u,v)$ は曲線 C_+ 上の整数点であることを示せ。

(2) 点 $P(x,y)$ が C_+ または C_- の整数点で $y\neq 1$ ならば $0<v<y$ であることを示せ。

(3) $(\sqrt{2}+1)^n=x_n+y_n\sqrt{2}$ (x_n,y_n は整数,n は自然数) と表す。点 $P_n(x_n,y_n)$ は曲線 C_+ または C_- 上にあることを示せ。

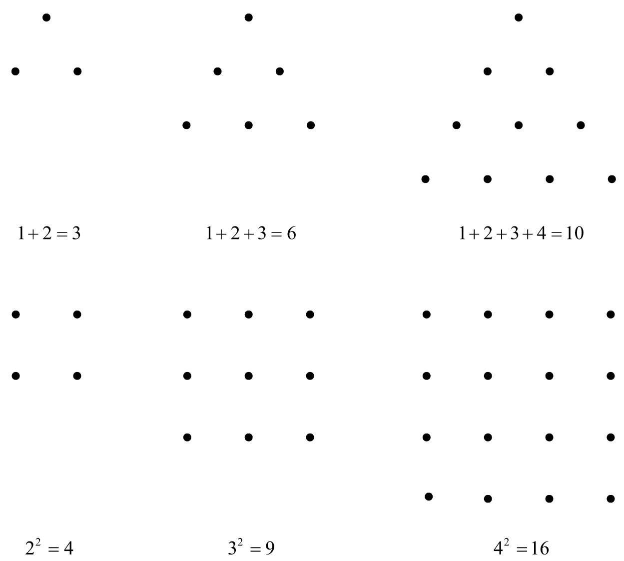
(4) 曲線 C_+ または C_- 上の整数点は $P_n(x_n,y_n)$ (n は自然数) に限ることを示せ。

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n}$ を求めよ。

4　図形数

4.1　三角数と四角数

図形の形に並べたときに得られる性質に基づいて、その意味を与えられた数が何種類かある。たとえば四角数（平方数）n^2 は n の平方、すなわち 1 辺 n の正方形の形に並べたものから出来ている。同様に三角数は三角形から並べたものから出来ている。以下の図は（1 を除いて）始めのいくつかの平方数と三角数を表している。



さてここで四角数が三角数でもある数を見つけてみよう。例えば、

$1+2+3+4+5+6+7+8=36 \quad 6^2=36$

がすぐに求まる。その他にはないであろうか。その次の数は何であろうか。

三角数　$1+2+3+\cdots+m=\dfrac{m(m+1)}{2}$　　四角数　n^2

より、$n^2=\dfrac{m(m+1)}{2}$ となる正の整数 m,n を求めることになるが、この式を変形すると

$8n^2=(2m+1)^2-1$　ここで $x=2m+1, y=2n$ とおくと、$x^2-2y^2=1$ というペル方程式に帰着できる。

例題 6

三角数にも四角数にもなる数を求めよ。

（解答）$\dfrac{m(m+1)}{2}=n^2$ より、$8n^2=4m(m+1)=4m^2+4m=(2m+1)^2-1$

よって、$x=2m+1, y=2n$ とおくと、$2y^2=x^2-1 \quad \therefore\ x^2-2y^2=1$

例題 2 より、この方程式の解は次で与えられる。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 17 \\ 12 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 99 \\ 70 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 577 \\ 408 \end{pmatrix},\cdots \qquad \therefore \begin{pmatrix} 2m+1 \\ 2n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 17 \\ 12 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 99 \\ 70 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 577 \\ 408 \end{pmatrix},\cdots$$

$$\therefore \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 49 \\ 35 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 288 \\ 204 \end{pmatrix},\cdots \ \blacksquare$$

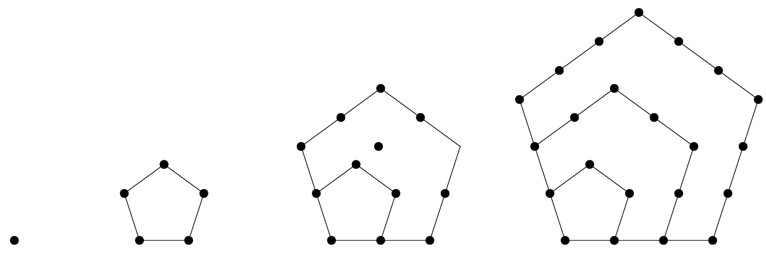
もう少し詳しく (m, n) の値を見てみましょう。

x	y	m	n	$n^2 = \frac{m(m+1)}{2}$
3	2	1	1	1
17	12	8	6	36
99	70	49	35	1225
577	408	288	204	41616
3363	2378	1681	1189	1413721
19601	13860	9800	6930	48024900
114243	80782	57121	40391	1631432881
665857	470832	332928	235416	55420693056

この表を見るとすぐにわかるように、平方三角数は急速に大きくなることがわかる。

4.2 五角数

数 n が五角数と呼ばれるのは、次の図のように入れ子の五角形の形に並べられるときをいう。



1　　5　　12　　22

それでは先ほどと同様に五角数で三角数であるものの存在を確かめよう。その前に次の定理を導いておかなくてはならない。

（定理）

(x_0, y_0) が方程式 $x^2 - Dy^2 = M$ の解であり、(x_1, y_1) が方程式 $x^2 - Dy^2 = 1$ の解であるとき、$(x_0x_1 + Dy_0y_1, x_0y_1 + y_0x_1)$ は $x^2 - Dy^2 = M$ の解である。

（証明）$(x_0, y_0), (x_1, y_1)$ それぞれ方程式 $x^2 - Dy^2 = M, x^2 - Dy^2 = 1$ の解なので、

$$x_0^2 - Dy_0^2 = M, x_1^2 - Dy_1^2 = 1 \quad \therefore (x_0^2 - Dy_0^2)(x_1^2 - Dy_1^2) = M$$

また、

$$(x_0x_1 + Dy_0y_1)^2 - D(x_0y_1 + y_0x_1)^2 = x_0^2x_1^2 - D(x_0^2y_1^2 + y_0^2x_1^2) + D^2(y_0^2y_1^2)$$
$$= (x_0^2 - Dy_0^2)(x_1^2 - Dy_1^2) = M \ \blacksquare$$

例題 7

三角数にも五角数にもなる数を求めよ。

（解答）まず、五角数の一般項 $\{a_n\}$ を求める。

$$1, 5, 12, 22, \cdots \quad \therefore a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1}(3k+1) = \frac{n(3n-1)}{2}$$

$$\therefore \frac{m(m+1)}{2} = \frac{n(3n-1)}{2} \quad m^2 + m = 3n^2 - n \quad \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 3\left(n - \frac{1}{6}\right)^2 - \frac{1}{12}$$

$$\therefore (6n-1)^2 - 3(2m+1)^2 = -2 \quad \therefore x^2 - 3y^2 = -2 \ (x = 6n-1, y = 2m+1)$$

$x^2 - 3y^2 = -2$ の最小解は $x^2 = -2 + 3y^2$　$x^2 \equiv -2 \equiv 1 \pmod 3$ より $(x_0, y_0) = (1, 1)$

次に $x^2 - 3y^2 = 1$ の解を求める。

$\sqrt{3} = [1, \overline{1, 2}], l = 2$　$2m - 1$ に $m = 1$ を代入して 1

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

よって、最小解は $(p_1, q_1) = (2, 1)$

次に一般解 (x_1, y_1) を求める。

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \left(A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right)$$

ここで A^n を求める。

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0 \quad \therefore \lambda = 2 \pm \sqrt{3}$$

① $\lambda = 2 + \sqrt{3}$ のとき、$x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とすると、$(A - \lambda E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 3 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}x + 3y \\ x - \sqrt{3}y \end{pmatrix} = O$

$$\therefore x = \sqrt{3}y \quad \therefore \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}s \\ s \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

② $\lambda = 2 - \sqrt{3}$ のとき、$x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とすると、$(A - \lambda E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 3 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}x + 3y \\ x + \sqrt{3}y \end{pmatrix} = O$

$$\therefore\ x=-\sqrt{3}y \quad \therefore \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sqrt{3}t \\ -t \end{pmatrix}=t\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix}$$

$P=\begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{3} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ とおくと、$P^{-1}=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$

$$\therefore\ P^{-1}AP=\frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{3} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2+\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 2-\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$\therefore\ (P^{-1}AP)^n=\begin{pmatrix} (2+\sqrt{3})^n & 0 \\ 0 & (2-\sqrt{3})^n \end{pmatrix} \quad \therefore\ A^n=P\begin{pmatrix} (2+\sqrt{3})^n & 0 \\ 0 & (2-\sqrt{3})^n \end{pmatrix}P^{-1}$$

$$\therefore\ A^n=\begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{3} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (2+\sqrt{3})^n & 0 \\ 0 & (2-\sqrt{3})^n \end{pmatrix}\frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \dfrac{(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n}{2} & \dfrac{\sqrt{3}\{(2+\sqrt{3})^n-(2-\sqrt{3})^n\}}{2} \\ \dfrac{(2+\sqrt{3})^n-(2-\sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}} & \dfrac{(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n}{2} \end{pmatrix}$$

$$\therefore\ x_1=\frac{(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n}{2}, y_1=\frac{(2+\sqrt{3})^n-(2-\sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 16 \\ 15 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 97 \\ 50 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 362 \\ 209 \end{pmatrix},\cdots$$

$$\therefore \begin{pmatrix} x_0x_1+3y_0y_1 \\ x_0y_1+y_0x_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6n-1 \\ 2m+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 19 \\ 11 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 71 \\ 41 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 265 \\ 153 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 989 \\ 571 \end{pmatrix},\cdots$$

$$\therefore \begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 12 \\ 20 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 165 \\ 285 \end{pmatrix},\cdots \ \blacksquare$$

練習問題

$\boxed{1}$ 次の方程式は解を持つか。持つときはその解を見つけ、持たないときはその理由を説明せよ。

(1) $x^2 - 11y^2 = 7$

(2) $x^2 - 11y^2 = 433$

(3) $x^2 - 11y^2 = 3$

$\boxed{2}$ 三角数でもあり五角数でもある数は存在するか。ある場合はその数を求めよ。

$\boxed{3}$ 3 辺の長さが連続する整数で、面積が整数である 3 角形を求める。連続する整数を $(n-1), n(n+1)$、面積を m とする。ただし、m, n は自然数とする。

(1) 等式 $16m^2 = 3n^2(n^2-4)$ を示せ。さらに、$n = 2a, m = 3b$ とおくことで、$3(2b)^2 = (2a^2-1)^2 - 1$ を導け。

(2) (1) の式をペル方程式に帰着させ、それを解くことにより連続する 3 整数を求めよ。

付録１ 平方根の連分数

$\sqrt{2} = [1, \overline{2}]$
$\sqrt{3} = [1, \overline{1, 2}]$
$\sqrt{5} = [2, \overline{4}]$
$\sqrt{6} = [2, \overline{2, 4}]$
$\sqrt{7} = [2, \overline{1, 1, 1, 4}]$
$\sqrt{8} = [2, \overline{1, 4}]$
$\sqrt{10} = [3, \overline{6}]$
$\sqrt{11} = [3, \overline{3, 6}]$
$\sqrt{12} = [3, \overline{2, 6}]$
$\sqrt{13} = [3, \overline{1, 1, 1, 1, 6}]$
$\sqrt{14} = [3, \overline{1, 2, 1, 6}]$
$\sqrt{15} = [3, \overline{1, 6}]$
$\sqrt{17} = [4, \overline{8}]$
$\sqrt{18} = [4, \overline{4, 8}]$
$\sqrt{19} = [4, \overline{2, 1, 3, 1, 2, 8}]$
$\sqrt{20} = [4, \overline{2, 8}]$
$\sqrt{21} = [4, \overline{1, 1, 2, 1, 1, 8}]$
$\sqrt{22} = [4, \overline{1, 2, 4, 2, 1, 8}]$
$\sqrt{23} = [4, \overline{1, 3, 1, 8}]$
$\sqrt{24} = [4, \overline{1, 8}]$
$\sqrt{26} = [5, \overline{10}]$
$\sqrt{27} = [5, \overline{5, 10}]$
$\sqrt{28} = [5, \overline{3, 2, 3, 10}]$
$\sqrt{29} = [5, \overline{2, 1, 1, 2, 10}]$
$\sqrt{30} = [5, \overline{2, 10}]$
$\sqrt{31} = [5, \overline{1, 1, 3, 5, 3, 1, 1, 10}]$
$\sqrt{32} = [5, \overline{1, 1, 1, 10}]$
$\sqrt{33} = [5, \overline{1, 2, 1, 10}]$
$\sqrt{34} = [5, \overline{1, 4, 1, 10}]$
$\sqrt{35} = [5, \overline{1, 10}]$
$\sqrt{37} = [6, \overline{12}]$
$\sqrt{38} = [6, \overline{6, 12}]$
$\sqrt{39} = [6, \overline{4, 12}]$
$\sqrt{40} = [6, \overline{3, 12}]$
$\sqrt{41} = [6, \overline{2, 2, 12}]$
$\sqrt{42} = [6, \overline{2, 12}]$
$\sqrt{43} = [6, \overline{1, 1, 3, 1, 5, 1, 3, 1, 1, 12}]$
$\sqrt{44} = [6, \overline{1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 12}]$
$\sqrt{45} = [6, \overline{1, 2, 2, 2, 1, 12}]$
$\sqrt{46} = [6, \overline{1, 3, 1, 1, 2, 6, 2, 1, 1, 3, 1, 12}]$
$\sqrt{47} = [6, \overline{1, 5, 1, 12}]$
$\sqrt{48} = [6, \overline{1, 12}]$
$\sqrt{50} = [7, \overline{14}]$
$\sqrt{51} = [7, \overline{7, 14}]$
$\sqrt{52} = [7, \overline{4, 1, 2, 1, 4, 14}]$
$\sqrt{53} = [7, \overline{3, 1, 1, 3, 14}]$
$\sqrt{54} = [7, \overline{2, 1, 6, 1, 2, 14}]$
$\sqrt{55} = [7, \overline{2, 2, 2, 14}]$
$\sqrt{56} = [7, \overline{2, 14}]$
$\sqrt{57} = [7, \overline{1, 1, 4, 1, 1, 14}]$
$\sqrt{58} = [7, \overline{1, 1, 1, 1, 1, 1, 14}]$
$\sqrt{59} = [7, \overline{1, 2, 7, 2, 1, 14}]$
$\sqrt{60} = [7, \overline{1, 2, 1, 14}]$
$\sqrt{61} = [7, \overline{1, 4, 3, 1, 2, 2, 1, 3, 4, 1, 14}]$
$\sqrt{62} = [7, \overline{1, 6, 1, 14}]$
$\sqrt{63} = [7, \overline{1, 14}]$
$\sqrt{65} = [8, \overline{16}]$
$\sqrt{66} = [8, \overline{8, 16}]$
$\sqrt{67} = [8, \overline{5, 2, 1, 1, 7, 1, 1, 2, 5, 16}]$
$\sqrt{68} = [8, \overline{4, 16}]$
$\sqrt{69} = [8, \overline{3, 3, 1, 4, 1, 3, 3, 16}]$
$\sqrt{70} = [8, \overline{2, 1, 2, 1, 2, 16}]$
$\sqrt{71} = [8, \overline{2, 2, 1, 7, 1, 2, 2, 16}]$
$\sqrt{72} = [8, \overline{2, 16}]$
$\sqrt{73} = [8, \overline{1, 1, 5, 5, 1, 1, 16}]$
$\sqrt{74} = [8, \overline{1, 1, 1, 1, 16}]$
$\sqrt{75} = [8, \overline{1, 1, 1, 16}]$
$\sqrt{76} = [8, \overline{1, 2, 1, 1, 5, 4, 5, 1, 1, 2, 1, 16}]$
$\sqrt{77} = [8, \overline{1, 3, 2, 3, 1, 16}]$
$\sqrt{78} = [8, \overline{1, 4, 1, 16}]$
$\sqrt{79} = [8, \overline{1, 7, 1, 16}]$
$\sqrt{80} = [8, \overline{1, 16}]$
$\sqrt{82} = [9, \overline{18}]$
$\sqrt{83} = [9, \overline{9, 18}]$
$\sqrt{84} = [9, \overline{6, 18}]$
$\sqrt{85} = [9, \overline{4, 1, 1, 4, 18}]$
$\sqrt{86} = [9, \overline{3, 1, 1, 1, 8, 1, 1, 1, 3, 18}]$
$\sqrt{87} = [9, \overline{3, 18}]$
$\sqrt{88} = [9, \overline{2, 1, 1, 1, 2, 18}]$
$\sqrt{89} = [9, \overline{2, 3, 3, 2, 18}]$
$\sqrt{90} = [9, \overline{2, 18}]$
$\sqrt{91} = [9, \overline{1, 1, 5, 1, 5, 1, 1, 18}]$
$\sqrt{92} = [9, \overline{1, 1, 2, 4, 2, 1, 1, 18}]$
$\sqrt{93} = [9, \overline{1, 1, 1, 4, 6, 4, 1, 1, 1, 18}]$
$\sqrt{94} = [9, \overline{1, 2, 3, 1, 1, 5, 1, 8, 1, 5, 1, 1, 3, 2, 1, 18}]$
$\sqrt{95} = [9, \overline{1, 2, 1, 18}]$
$\sqrt{96} = [9, \overline{1, 3, 1, 18}]$
$\sqrt{97} = [9, \overline{1, 5, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 5, 1, 18}]$
$\sqrt{98} = [9, \overline{1, 8, 1, 18}]$
$\sqrt{99} = [9, \overline{1, 18}]$

付録２ ペル方程式の最小解

D	x	y	D	x	y	D	x	y
2	3	2	35	6	1	68	33	4
3	2	1	36	FALSE	FALSE	69	7775	936
4	FALSE	FALSE	37	73	12	70	251	30
5	9	4	38	37	6	71	3480	413
6	5	2	39	25	4	72	17	2
7	8	3	40	19	3	73	2281249	267000
8	3	1	41	2049	320	74	3699	430
9	FALSE	FALSE	42	13	2	75	26	3
10	19	6	43	3482	531	76	57799	6630
11	10	3	44	199	30	77	351	40
12	7	2	45	161	24	78	53	6
13	649	180	46	24335	3588	79	80	9
14	15	4	47	48	7	80	9	1
15	4	1	48	7	1	81	FALSE	FALSE
16	FALSE	FALSE	49	FALSE	FALSE	82	163	18
17	33	8	50	99	14	83	82	9
18	17	4	51	50	7	84	55	6
19	170	39	52	649	90	85	285769	30996
20	9	2	53	66249	9100	86	10405	1122
21	55	12	54	485	66	87	28	3
22	197	42	55	89	12	88	197	21
23	24	5	56	15	2	89	500001	53000
24	5	1	57	151	20	90	19	2
25	FALSE	FALSE	58	19603	2574	91	1574	165
26	51	10	59	530	69	92	1151	120
27	26	5	60	31	4	93	12151	1260
28	127	24	61	1766319049	226153980	94	2143295	221064
29	9801	1820	62	63	8	95	39	4
30	11	2	63	8	1	96	49	5
31	1520	273	64	FALSE	FALSE	97	62809633	6377352
32	17	3	65	129	16	98	99	10
33	23	4	66	65	8	99	10	1
34	35	6	67	48842	5967	100	FALSE	FALSE