第 1 講　ベクトルを楽しもう

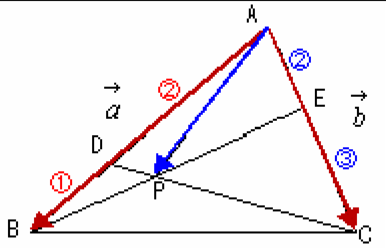
1_1　つり合い係数

ベクトルの一次独立性を使った問題に，次の様な問題があります。

△ABC の辺 AB を 2：1 に内分する点を D，辺 AC を 2：3 の比に内分する点を E とし，線分 CD と BE の交点を P とする。

$\vec{a}=\overrightarrow{AB}$，$\vec{b}=\overrightarrow{AC}$

とするとき，$\overrightarrow{AP}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。



この問題は普通

$$\overrightarrow{AP}=\frac{2}{3}\vec{a}+(1-t)\vec{b}\,,\quad \overrightarrow{AP}=(1-s)\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}$$

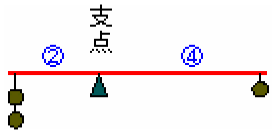
と $\overrightarrow{AP}$ を 2 通りに表わして，一次独立性の性質から連立方程式を解くことになります。とても計算が面倒ですね。

この問題を小学校の理科の授業で習った，てこの原理を用いて解いてみましょう。右の図のようにてこが支えられている点を“支点”といいましたね。そして，

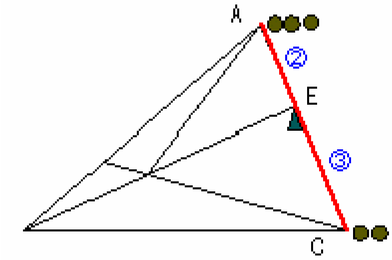
左右のおもりの数×支点からの距離

の値は等しくなる，というのがてこの原理でした。

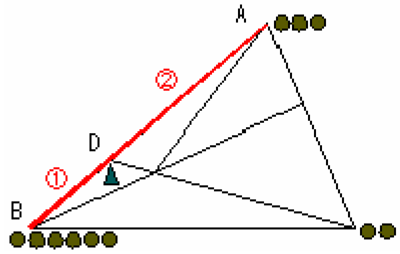
この原理をベクトルに応用してみましょう。



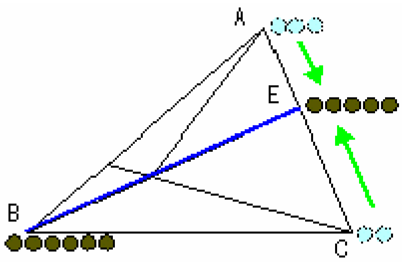
①まず点 E に支点をおいて，A と C のおもりの個数を考えます。



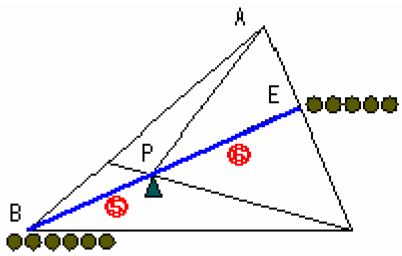
②今度は点 D に支点を移し，A のおもりの個数から B のおもりの個数を考えます。



③線分 BE をてこの棒だと考え，点 E に A と C のおもりを合わせて移します。



④最後に点 P に支点を移し，B と E のおもりの個数から BP：PE の値がでます。

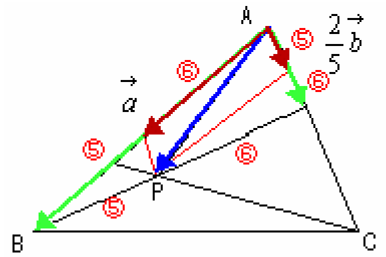


こうして BP：PE の比が出るので，

$$\overrightarrow{AP}=\frac{6}{11}\vec{a}+\frac{5}{11}\times\frac{2}{5}\vec{b}$$

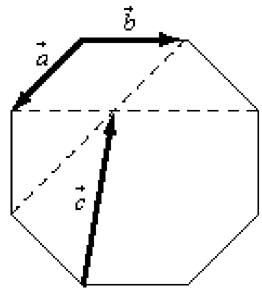
$$=\frac{6}{11}\vec{a}+\frac{2}{11}\vec{b}$$

となります。

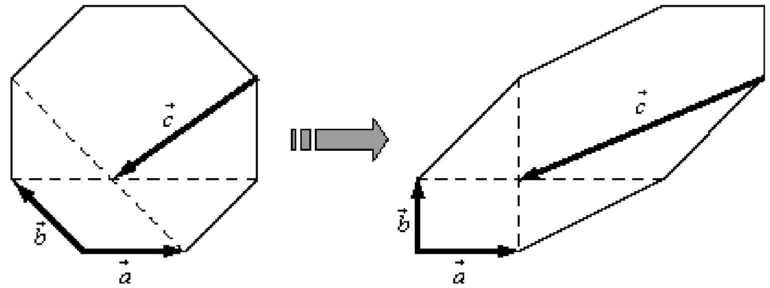


1_2　多角形の変形で解くベクトル問題

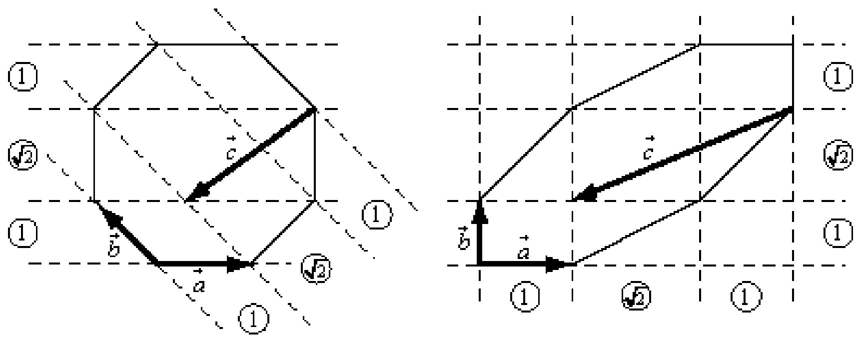
平面上の任意のベクトルは，平行でない２つのベクトルの和で表すことができます。では右の正 8 角形において $\vec{c}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の和で表してみましょう。
案外難しそうに見えますが，見方を変えるとあっという間に解けてしまいます。



問題を簡単にするため，次の図のように $\vec{a}$ を底辺に持ってきます。そしてこの多角形を $\vec{b}$ が垂直なる様に全体を傾けていきます。



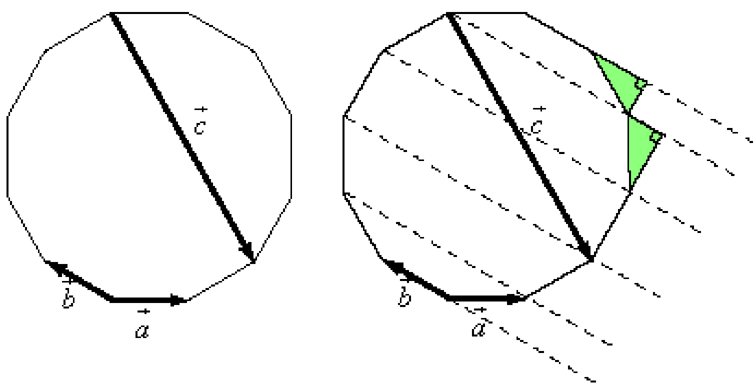
ここで正 8 角形の縦，横の長さの比は，傾けても変わらないことを利用します。正 8 角形の外角が 45°であることより，次のような比を持つ図ができあがります。



傾けた多角形より $\vec{c}$ は次のように与えられることが分かります。

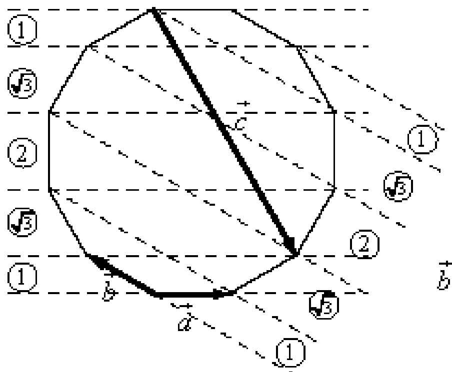
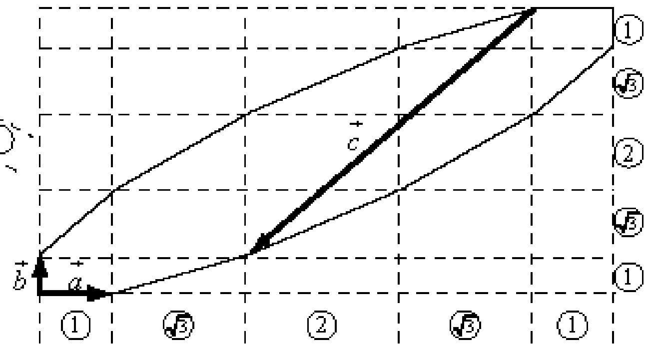
$$\vec{c} = -(1+\sqrt{2})\vec{a} - \sqrt{2}\vec{b}$$

では同様に正 12 角形で試してみましょう。次の左図で $\vec{c}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表します。全体を先ほどと同様に傾けるのですが，その前に全体の縦・横の比の値を調べてみましょう。

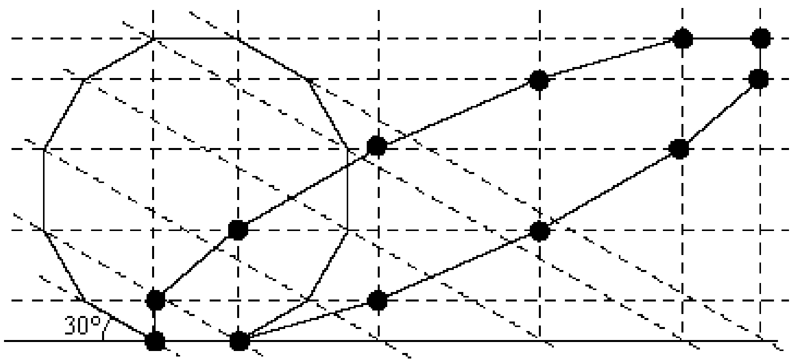


正 12 角形の外角は 30°ですから，上の右図で色づけをした三角形が 30°，60°の直角三角形になります。このことから，次のような比を持つ図ができあがります。
これより $\vec{c}$ は次のように与えられることが分かります。

$$\vec{c} = -(2+\sqrt{3})\vec{a} - (3+2\sqrt{3})\vec{b}$$

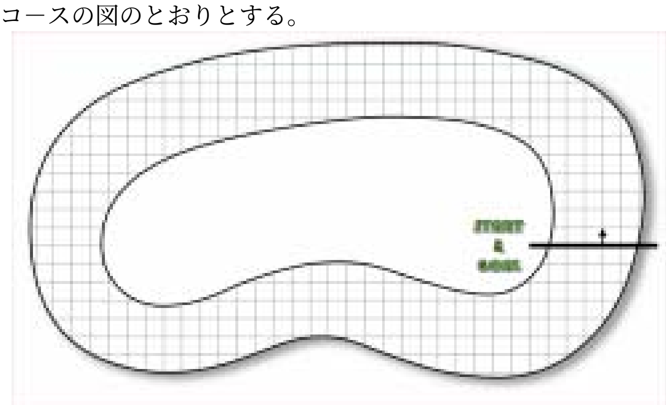
ここで傾けた多角形を描くにはどうしたらよいでしょう。平行線の比が等しいことを考えれば簡単に描くことができます。次の図のように，底辺（先ほどの $\vec{a}$ ）の延長と左隣の辺（先ほどの $\vec{b}$ ）に平行で各頂点を通る直線との交点をとります。この点から垂直に引いた直線と，各頂点から底辺に平行な各直線との交点が傾けた多角形の頂点になります。



1_3　ベクトルグランプリ

ファミコンのゲームに「電車でＧｏ！」というのがあります。電車のスピードを速度ではなく，加速度で調整していき，ゴールにできるだけ早く到達できればよいゲームです。
そのゲームと同じで，なおかつ向きも指定しなくてはならないのが，次にあげる「ベクトルグランプリ」です。
これは，次のようなルールを持ったゲームです。

1. 1 つの矢印（ベクトル）は 1 秒かかるとし，短い時間で一周したものが勝ち。
2. 矢印（ベクトル）を作るとき，その矢印（ベクトル）は，現在の矢印（ベクトル）に次の矢印（ベクトル）のいずれかを加える。
   $(1, 0)$　$(1, 1)$　$(0, 1)$　$(-1, 1)$
   $(-1, 0)$　$(-1, -1)$　$(0, -1)$　$(1, -1)$
3. 最初のスタートはコースの図のとおりとする。

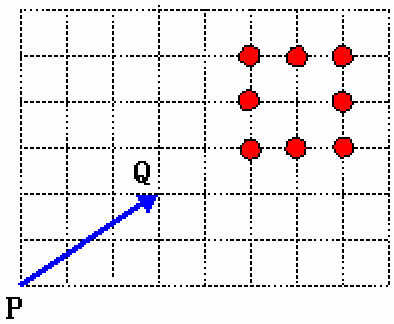


4. コースをはみ出した場合は失格とする。

例えば，ある瞬間に $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(3,2)$ としたとき，その次の矢印は次の 8 通りになります。

(4，2)　(4，3)　(3，3)　(2，3)
(2，2)　(2，1)　(3，1)　(4，1)

つまり，終点 R は右図の 8 つの点のどこかにいくことになります。そして，その矢印を Q につなげるのです。コースをはみ出すと負けになるので，次の矢印を見通さないと，なかなか難しいですよ。



ルール 2 は，急加速，急ブレーキ，急カーブを不可能にした取り決めで，“ 車は急に止まれない ” ことを示しています。スピードを出し過ぎるとコースの外に飛び出してしまう。スピードを押さえ過ぎると時間がかかる。ちょうど矢印（ベクトル）がアクセルとハンドルの役目を果たすわけです。
さて，途中まで発走してみたものを，次にのせておきます。

1	(0，1)	4	(−1，2)＋(0，−1)＝(−1，1)
2	(0，1)＋(0，1)＝(0，2)	5	(−1，1)＋(−1，0)＝(−2，1)
3	(0，2)＋(−1，0)＝(−1，2)	6	(−2，1)＋(−1，−1)＝(−3，0)