第 5 講　パスカルの三角形

5_1　数列の宝庫　パスカルの三角形

$(a+b)^n$ を計算して展開式に現れる各項の係数を並べると，下図左のような配列が得られます。このように並んだ数の配列をパスカルの三角形といいます。パスカルは“ 賭けを中断した際の公平な配分方法 ”の中から「パスカルの三角形」を発見したといわれています。

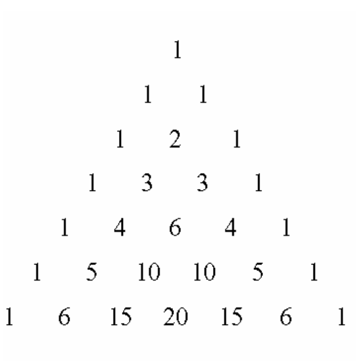
この三角形の任意の数はその 1 つ上の段の隣接する 2 項の和になっています。$(a+b)^n$ の展開は $(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} {}_nC_r a^{n-r} b^r$ で与えられ，右辺の係数 ${}_nC_r$ を 2 項係数といいます。隣接する 2 項の和になっていることを式で表すと

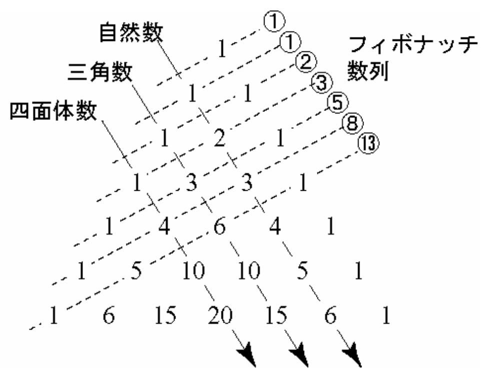
$${}_nC_r = {}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_r$$

ですが，これは次の様にもかけます。

$$\frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!} + \frac{(n-1)!}{r!(n-r-1)!} \qquad \frac{n!}{r!s!} = \frac{(n-1)!}{(r-1)!s!} + \frac{(n-1)!}{r!(s-1)!} \quad (n = r+s) \quad ・・・①$$

これは $(a+b)^n = (a+b)(a+b)^{n-1}$ の係数を比較するでわかります。





パスカルの三角形を調べると，いろいろな数列が現れます。例えば各段の右から 2 番目の数を小さい方から順位に並べた数列

1，2，3，4，5，6，・・・

は自然数の数列です。また，右から 3 番目の数を並べた数列

1，3，6，10，15，21，・・・

は三角数，右から 4 番目の数を並べた数列

1，4，10，20，35，・・・

は四面体数と呼ばれる自然数列です。上図右で点線の上に並ぶ数の和を求めてみましょう。得られた和を順に並べてできる数列

1，1，2，3，5，8，・・・

はフィボナッチ数列と呼ばれ，隣接 2 項の和が次の項になっています。下図左のように n 段目に並ぶ数の和を求めて得られる数列

1，2，4，8，16，32，・・・

は第 n 項が 2^{n-1} で与えられます。また各数を横に見てみましょう。

1，11，121，1331，14641，161051，⋯

こうしてできた数列は第 n 項が 11^{n-1} で与えられます。6 段目の 1，5，10，10，5，1 は十の位の数字を左の数字に加えて計算します。

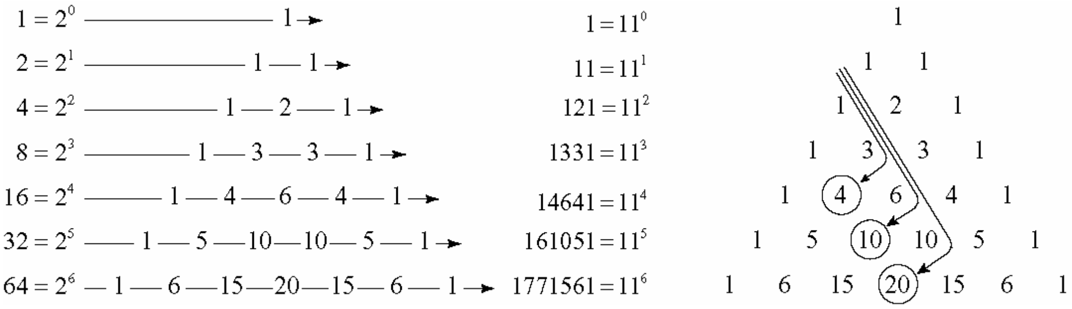
各数を次図のように斜めに見てみます。例えば右下がり 3 列目の数列

1，3，6，10，15，21，・・・

の和を考えます。n 番目までの和を S_n とすると，

$$S_2 = 1+3 = 4,\quad S_3 = 1+3+6 = 10,\quad S_4 = 1+3+6+10 = 20$$

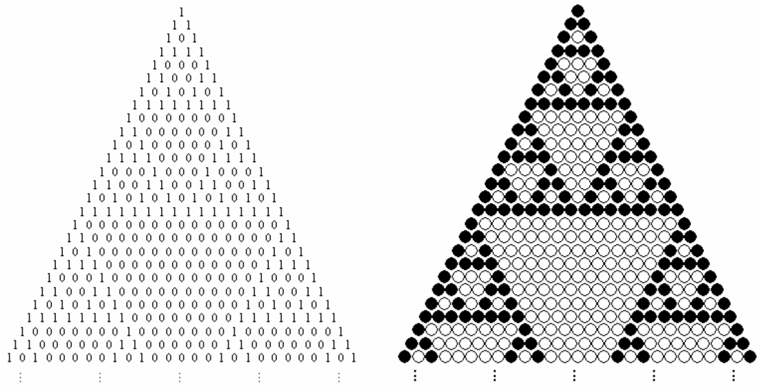
出てきた数は最後の数の左下にある数になっています。



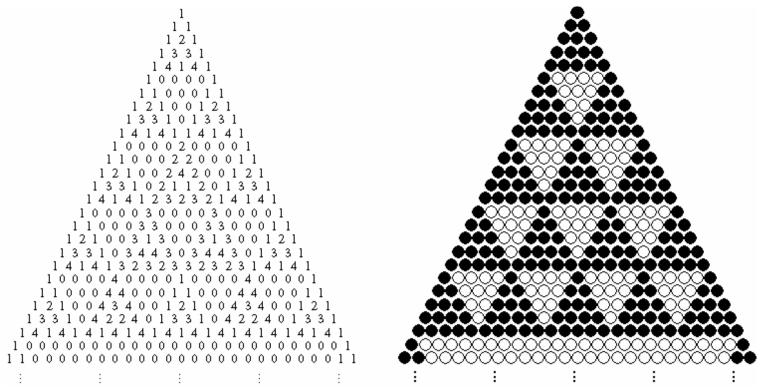
5_2　自然数で割った余りでつくるパスカルの三角形

パスカルの三角形に現れる数字の剰余系を考えてみましょう。次図左はパスカルの三角形の各数を 2 で割ったときの余りを並べたものです。さらに右図では 2 で割り切れる数を○，割り切れない数を●であらわしました。シンメトリックでなかなか美しい模様が姿を現しましたね。

これは自分自身を拡大（縮小）したものを自分自身の中に含むという構造が，無限に繰り返された形をしています。これを自己相似な図形（フラクタル図形）といいます。



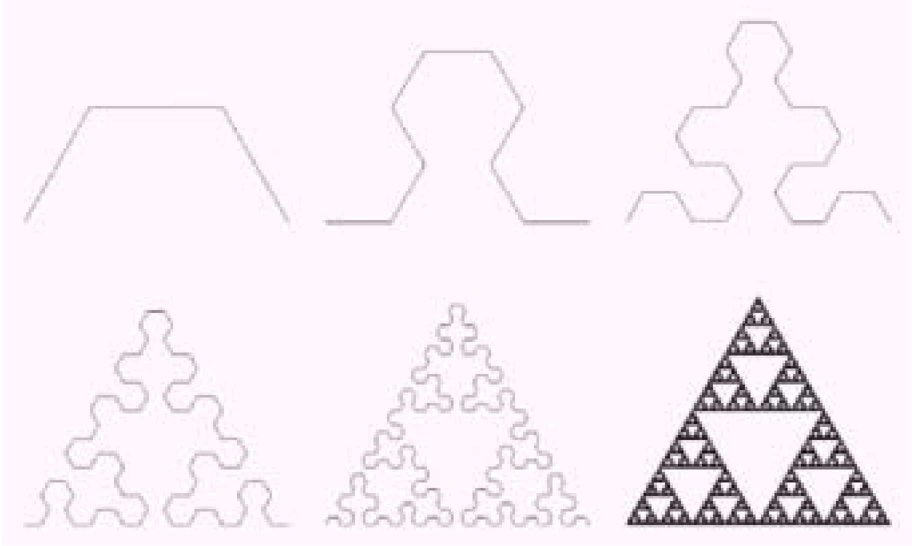
次の下図左は 3 の剰余系，右図は 5 の剰余系で，先ほど同様に割り切れる数を○で表し，割り切れない数を●で表しています。



これを別な角度から考えてみましょう。次のような図形を考えます。

1. ある点から反時計回りに 60°回転して一定距離の前進
2. 次に時計回りに 60°回転して同じ距離だけ前進
3. 最後にまた時計回りに 60°回転して同じ距離だけ前進

こうして 3 本の線分をつなげます。次に各線分を 3 分の 1 に縮小し，各線分にはめ込みます。ただし，1 番目と 3 番目には逆向きにはめ込みます。さらに，各線分をまた 3 分の 1 に縮小し，今と同様にはめ込みます。次図のように，この操作を何度も繰り返していきましょう。すると先ほどのパスカルの三角形に近づいてきました。このフラクタル図形が有名なシルピンスキーのギャスケットです。



5_3　パスカルの三角錘　－3 次元への拡張

$(a+b)^n$ と同様に $(a+b+c)^n$ の展開式の場合を考えてみましょう。展開してみると，次のようになります。

$n=1 \quad a+b+c$

$n=2 \quad a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

$n=3 \quad a^3+b^3+c^3+3a^2b+3ab^2+3b^2c+3bc^2+3c^2a+3ca^2+6abc$

$n=4 \quad a^4+b^4+c^4+4a^3b+4ab^3+4bc^3+4b^3c+4a^3c+4ac^3+6a^2b^2+6b^2c^2+6a^2c^2+12a^2bc+12ab^2c+12abc^2$

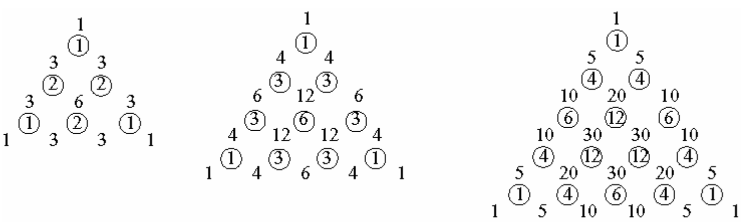
3 項についての係数は $(a+b+c)^n=(a+b+c)(a+b+c)^{n-1}$ の係数を比較することで，次の様に求まります。

$$\frac{n!}{r!s!t!}=\frac{(n-1)!}{(r-1)!s!t!}+\frac{(n-1)!}{r!(s-1)!t!}+\frac{(n-1)!}{r!s!(t-1)!} \quad (n=r+s+t) \quad \cdots ②$$

2 項係数，3 項係数の式①②が同じように与えられるのがわかります。
また各 n の値に対して 3 項係数を並べると，下図のような三角形ができます。

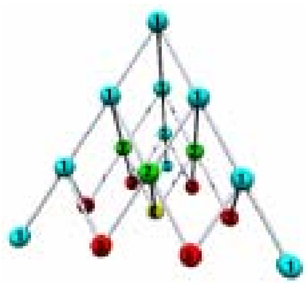
$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$
1	1	1	1	1
1　1	2　2	3　3	4　4	5　5
	1　2　1	3　6　3	6　12　6	10　20　10
		1　3　3　1	4　12　12　4	10　30　30　10
			1　4　6　4　1	5　20　30　20　5
				1　5　10　10　5　1

この三角形を 2 段ずつ取り出し，次図のように重ね合わせてみましょう。○の数字が上の段になります。すると任意の数はその 1 つ上の段の隣接する 3 項の和で求まるのがわかります。



(○は n=2)　(○は n=3)　(○は n=4)

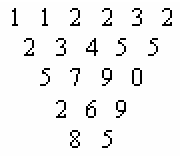
この三角形を三角錐の断面と考え，右図のように積み上げてみましょう。これは立体的なパスカルの三角形（パスカルの三角錐）と考えることができます。側面は普通のパスカルの三角形となっていますね。



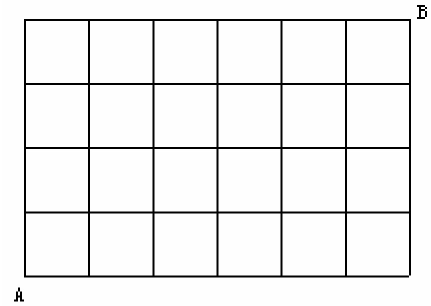
5_4　道筋の問題

片思いの相手との相性を 2 人の名前から占うというのを，昔やったことがあります。これは自分の名前を母音順で数字に直します。例えば「まさし→112」，「みゆき→232」といったぐらいです。これを右の図のように並べて，隣り合う数字を足していきます（下一桁のみ）。

こうして出てきた最後の 2 桁の数字が 2 人の相性度になるというものです。この場合は 85%。（妻との相性，こんなに高いの？）



これと似た感覚の道筋の問題を考えてみましょう。

> 右の図のような図の道において，A から B へいく最短の道筋は何通りあるでしょうか。
>
> 
>

この問題は授業の中では

・横 6 個，縦 4 個の道筋から横 6 個（または縦 4 個）を選べばよいから $_{10}C_6$

・横 6 個，縦 4 個の道筋において横 6 個，縦 4 個の同じものを含む順列と考え $\dfrac{10!}{6!4!}$

などと習います。

これを“P”とか“C”を使わないで求めてみましょう。右の図のように点 A から横の交点と縦の交点に数字の“1”をつけていきます。そして，各道筋の交点にはすぐ下の数字と左側の数字の和を書いていきます。こうして出てきた点 B の値が求める道順の数になります。

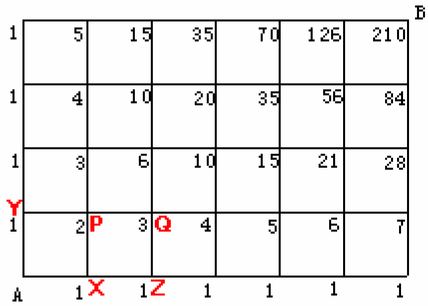
これは A→P は

A→X→P（1 通り）と A→Y→P（1 通り）

の 2 通り。A→Q は

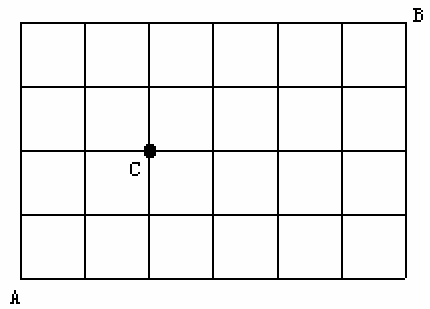
A→Z→Q（1 通り）と A→P→Q（2 通り）

の合計 3 通り。同様に考えればわかりますね。



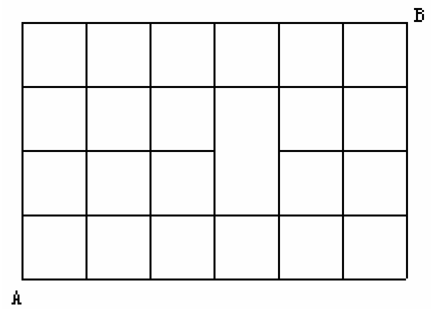
同じような問題で次のような図ではどうでしょうか。試してみてください。

(1)



点 C を通る

(2)



これと似たような話題でパスカルの三角形があります。$(a+b)^n$ の展開式に現れる各項の係数を並べるたものをパスカルの三角形と言います。この数字は今の道筋の問題でやったのと同じように，数字の和が次々と出てくるのがわかりますね。

面白いのは道順の各々の数を加えると，

1＋6＋15＋20＋15＋6＋1＝64＝2^6

$(a+b)^6$ と一致しますね。