筑波大学附属駒場中・高等学校
Junior & Senior High School at Komaba, University of Tsukuba

第128回 北数教 数学教育実践研究会
2024年 1 月27日(土) 13:40～15:10

駒場的・自由闊達な教材開発生活

筑波大学附属駒場中・高等学校
数学科 教諭(2023年度教科主任)
須藤 雄生
sudo.yu.gn@un.tsukuba.ac.jp
www.facebook.com/yu.sudo.46

講演者自己紹介

- 筑波大学附属駒場中・高等学校教諭(2012～)
  - 都立高等学校・中等教育学校に各 4 年(2004～2011)
- いわゆる「OB教員」です
  - 筑波大学附属駒場中学校(1992～1995)
  - 筑波大学附属駒場高等学校(1995～1998)
- 国語/数学/英語が好き，社会/理科/実技は全部苦手な高校時代
  - 自分は文系なのか，理系なのか？→大学案内に「文系でも理系でもない教員養成系というページがあるぞ？」
  - そういえば塾をやっていたわけでもないのに業務用黒板を買って子ども部屋に置いてもらった小学生

講演者自己紹介

- 大学院での研究テーマ
  - 「再帰の考えに着目した離散数学教材の開発」(2004)
- 本校での教材開発・実践事例
  (毎年のだいたいの「その年いちばんウケた/面白かった教材」)

2012	平方根の連分数展開について	2018	ベクトルを活用した「図形と方程式」
2013	図で証明する三角関数の性質	2019	定積分と面積比
2014	剰余類とウィルソンの定理	2021	循環小数と記数法
2015	双心四角形の性質	2022	続・2 次関数の係数決定
2016	集合と場合の数の導入	2022	自己相似図形の教材化
2017	2 次関数の係数決定	2023	ビーティの数列とワイソフのゲーム

筑波大学附属駒場中・高等学校 「筑駒(つくこま)」

- 1947年創立の男子校 今年 3 月の卒業期は第72期生
- 所在地 東京都世田谷区池尻
  - 茨城の学校ではありません(筑波大学は茨城県つくば市)
  - 実は「駒場」は目黒区の地名(本校管理の水田のみ存在)
  - 筑波大学附属高等学校は違う学校です(東京都文京区)
- 生徒は 1 学級約40名
  - 中学校 9 学級 約360名(1 学年 3 学級)
  - 高等学校 12学級 約480名(1 学年 4 学級)
  - 高校は約120名の連絡進学と約40名の新入生で入学時より混成

筑駒数学科の授業

- 中高とも50分授業 月～金 6 校時
- 週当たりの時間数/設置科目
  - 中学 3 学年とも週 4 時間 中 3 テーマ学習(選択)
  - 高 1 数学Ⅰ(2) 数学 A (2)
  - 高 2 数学Ⅱ(3) 数学 B (2)
    理数探究基礎(選択1) 課題研究 (土曜に実施)
  - 高 3 数学Ⅲ(選択 6)
    2023まで旧課程 数学Ⅱ (選択 2) ⅠⅡAB の総合演習
    数学 B (選択 2) 確率分布と統計的推測

筑駒数学科の目標と特徴

- いろいろな現象や事柄に潜む法則や仕組みを数学的に解析し、その本質をとらえ、それらを表現できるようになること
- 授業を通して数学に対する興味関心を深めるとともに、数学の真の学力を獲得すること
- 「問題が解けるようになること」
  のみを目標とはしない
  先取り学習カリキュラムは組まない 早修ではなく拡充

筑駒数学科の授業の特色

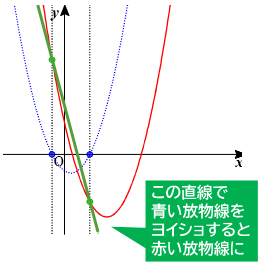
- 中高 6 か年はもとより，大学進学後の学びも見通した長期的な視野で授業を構成
  - 中学のみ/高校のみを
    長年担当する専任はいない
- 中学入学から高校卒業まで一貫して
  生徒が発見すること
  生徒自身が表現すること
  を大切にする授業

筑駒数学科の授業の特色(都市伝説)

- 「関数をヨイショする」「いい感じにぐわぁーッとする」などの謎の擬音で表現される概念が日々うみ出される？
- 3 次関数の極値を扱う授業で，50分間微積分が一度も出てこないことがある？
- 数学Ⅰが週 2 単位しかない学校なのに，50分授業が教科書の例題 1 題で終わる(しかも最後まで解き終わらない) ことがある？
- 生徒がワークシートを「あたらしい算数12」と呼ぶ数Ⅲの授業がある？
- 授業終了のチャイム後，休み時間の教室で生徒の授業が始まる？

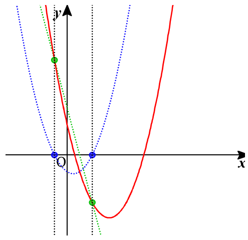
関数をヨイショする？

- 例題
  3点 A$(-1, 8)$, B$(2, -4)$, C$(4, -2)$を通る放物線を表す2次関数を求めよ。
- グラフの和に着目
  - A, Bを通る放物線は，2点を通る直線 $y=-4x+4$ と $(-1, 0)$, $(2, 0)$を通る放物線 $y=a(x+1)(x-2)$ の和であるから $\boxed{y=a(x+1)(x-2)-4x+4}$ とおける



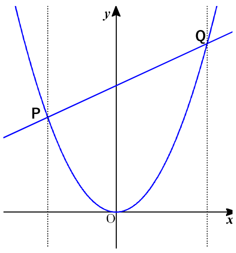
ヨイショしたあとの係数決定は

- 例題
  3点 A$(-1, 8)$, B$(2, -4)$, C$(4, -2)$を通る放物線を表す2次関数を求めよ。
- グラフの和に着目
  $\boxed{y=a(x+1)(x-2)-4x+4}$
  - この式が点Cを通るように代入して a を定めると $a=1$
- a の値をグラフの解釈で求めることはできないか？



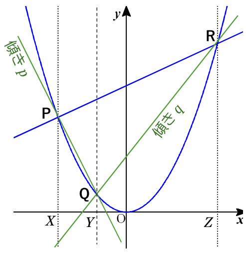
高校からの新入生M君がここで登場

- 原点を通る放物線 $y=ax^2$上に，相異なる 2 点 P$(s,\ as^2)$, Q$(t,\ at^2)$があるとき，直線PQの傾きは $a(s+t)$ で表される
- 高校入試の超定番事項(うなずく高入生多数） 連絡生は天真爛漫に「マジか！ これみんな知ってるの！」
- これ 3 点目を加えてみるとどのようなことが成り立つ？



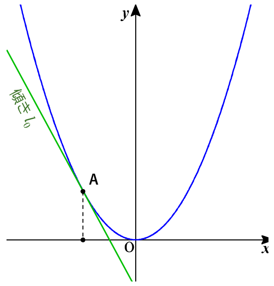
新しい何か(M君の定理)が教室にもたらされた

- 原点を通る放物線 $y=ax^2$上に，相異なる 3 点P$(X,\ aX^2)$, Q$(Y,\ aY^2)$, R$(Z,\ aZ^2)$があるとき……
- 直線PQの傾き $p=a(X+Y)$
  直線QRの傾き $q=a(Y+Z)$
  よって $\boxed{a=\dfrac{p-q}{X-Z}}$
- 放物線を平行移動しても成り立つ
  (a , $X-Z$, $p-q$ が変わらないため)



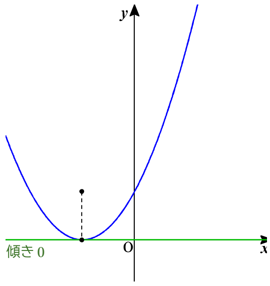
次は連絡進学生のターン

- 放物線 $y=f(x)$上の点 A での接線 $y=g(x)$を考える
  (その傾きを l_0とする)
- この図全体を直線の分だけ「ガコっと下げる」(逆ヨイショ)
- $y=f(x)-g(x)$ は
  x 座標が A と等しい x 軸上の点で直線 $y=g(x)-g(x)$すなわち x 軸に接する放物線となる



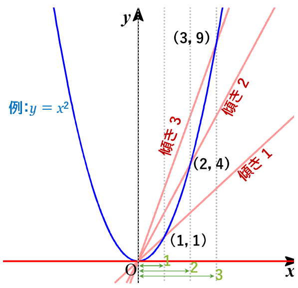
次は連絡進学生のターン

- 放物線 $y=f(x)$上の点 A での接線 $y=g(x)$を考える
  (その傾きを l_0とする)
- この図全体を直線の分だけ「ガコっと下げる」(逆ヨイショ)
- $y=f(x)-g(x)$ は
  x 座標が A と等しい x 軸上の点で直線 $y=g(x)-g(x)$すなわち x 軸に接する放物線となる



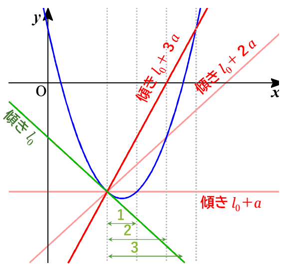
「 $y=ax^2$ ってことは, y は ax に比例してるんで」

- ところで放物線 $y=ax^2$ 上の点 P$(t,\ at^2)$ と原点(頂点)を結ぶ直線の傾きは at
- つまり，頂点との x 座標の差と直線の傾きは比例する
- x^2 の係数 a は
  この直線の傾きの変化の割合
  にあたる



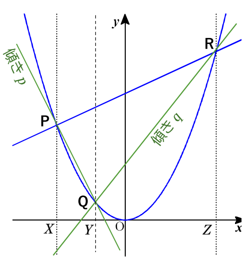
直線で逆ヨイショして一般化

- ということは
  頂点が原点にない放物線でも，放物線上のある点を通る接線で逆ヨイショすれば，同じ図になる
- つまり 2 点間を結ぶ直線の傾きは 1 次関数で変化しているということがわかった
  (数学教育の文脈でいえば「導関数の概念の萌芽」)
- 「M君の定理ってこれですよね？」



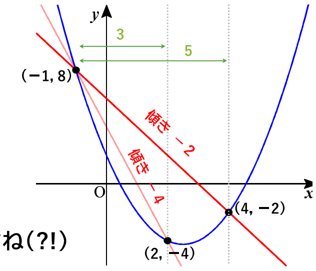
M君の定理，そう言われるとたしかにそう見える

- 原点を通る放物線 $y=ax^2$上に，相異なる3 点P$(X,\ aX^2)$，Q$(Y,\ aY^2)$，R$(Z,\ aZ^2)$があるとき……
- 直線PQの傾き $p=a(X+Y)$
  直線QRの傾き $q=a(Y+Z)$
  よって $a=\dfrac{p-q}{X-Z}$
- 放物線を平行移動しても成り立つ
  (a , $X-Z$, $p-q$ が変わらないため)



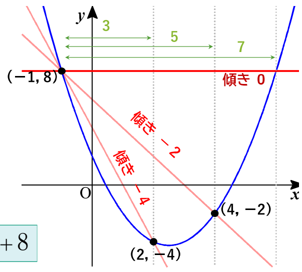
なお，授業から連立方程式が消える

- 練習問題：3 点 A$(-1,8)$，B$(2,-4)$，C$(4,-2)$を通る放物線を表す2次関数を求めよ。
- 完成予想図は右の青い放物線
- まず直線AB，ACの傾きを調べる
  3 行って傾き-4，
  5 行って傾き-2
- ということは 2 次の係数は 1 ですね(?!)



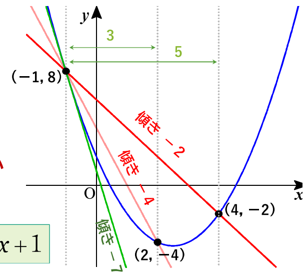
第4の点だって見つかってしまう

- 練習問題：3 点 A$(-1,8)$，B$(2,-4)$，C$(4,-2)$を通る放物線を表す2次関数を求めよ。
- 3 行って傾き-4，
  5 行って傾き-2 ということは
  7 行ったら傾き 0 じゃないですか
- 第 4 の点 D$(6,8)$発見
- 求める 2 次関数 $y=(x+1)(x-6)+8$



こんな解法も

- 練習問題：3 点 A$(-1,8)$，B$(2,-4)$，C$(4,-2)$を通る放物線を表す2次関数を求めよ。
- 3 行って傾き-4，
  5 行って傾き-2 ということは
  0 行ったら傾き -7 じゃないですか
- $(-1,8)$ での接線が判明
- あとはヨイショして $y=(x+1)^2-7x+1$



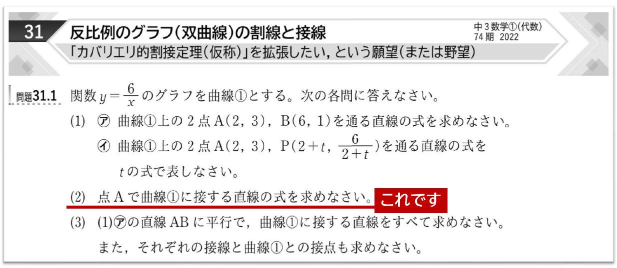
結局解いたのは2次関数の係数決定問題でした

- 三元連立方程式で解こうと思えば解けるのかもしれないけどせっかく学校の授業だし，普通の練習がやりたければ各自で，という割り切り(生徒も教師もなんとなく価値観を共有している)
- 高 1 は現代風にいう「高校受験ゼロ勉」と「高校受験ガチ勢」の異文化交流」もいっそのこと授業の妙味に
- 授業後に発言した生徒のまわりに何人か集まって「さっきのガコッてやつは何？」みたいな二次会(むしろ本編)が始まる

筑駒数学科の授業の特色(都市伝説) 再び

- 「関数をヨイショする」「いい感じにぐわぁーッとする」などの謎の擬音で表現される概念が日々うみ出される？
- 3 次関数の極値を扱う授業で，50分間微積分が一度も出てこないことがある？
- 数学 I が週 2 単位しかない学校なのに，50分授業が教科書の例題 1 題で終わる(しかも最後まで解き終わらない) ことがある？
- ワークシートが「あたらしい算数12」と呼ばれる数Ⅲの授業がある？
- 授業終了のチャイム後，休み時間の教室で生徒の授業が始まる？

いい感じにぐわぁーッとする



31 反比例のグラフ(双曲線)の割線と接線 中３数学①(代数) 74 期 2022

「カバリエリ的割接定理(仮称)」を拡張したい，という願望(または野望)

問題31.1 関数 $y=\dfrac{6}{x}$ のグラフを曲線①とする。次の各問に答えなさい。

(1) ㋐ 曲線①上の 2 点 A$(2,3)$，B$(6,1)$を通る直線の式を求めなさい。

㋑ 曲線①上の 2 点 A$(2,3)$，P$\left(2+t,\ \dfrac{6}{2+t}\right)$を通る直線の式を t の式で表しなさい。

(2) 点 A で曲線①に接する直線の式を求めなさい。 これです

(3) (1)㋐の直線 AB に平行で，曲線①に接する直線をすべて求めなさい。また，それぞれの接線と曲線①との接点も求めなさい。

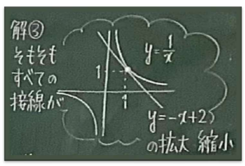
いったい何を言っているんだ

関数 $y=\dfrac{6}{x}$ のグラフを曲線①とする。

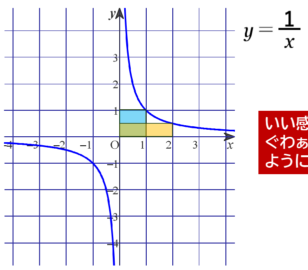
A$(2,3)$ で曲線①に接する直線の式を求めなさい。

- 「 $y=\dfrac{1}{x}$ を
  いい感じにぐわぁーッとすると
  $y=\dfrac{6}{x}$ になるので」

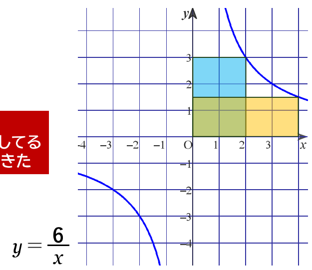
懸命に翻訳してこうなった



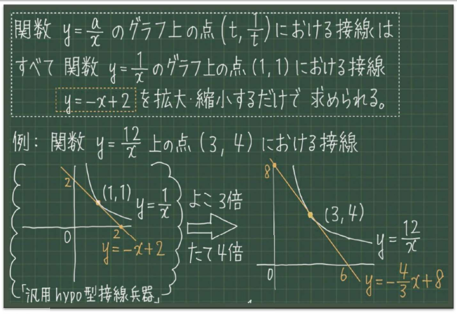
どうやら双曲線は「面積一定」に見えているらしい



いい感じに
ぐわぁーッとしてる
ように見えてきた



そして爆誕した「汎用双曲線型接線兵器(仮)」



時を越えて高3では

30 双曲線関数とその性質
三角関数のことは実は「円関数」と呼んだほうがいいのかもしれないと思わされる
72期 高3 数学Ⅲ② 2023

問題30.1 曲線 $y=\frac{6}{x}$ $(x>0)$，直線 $y=6x$，および直線 $y=x$ で囲まれた図形の面積を求めよ。

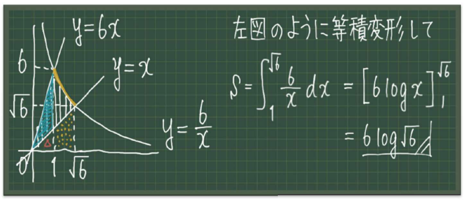
問題30.2 実数 θ に対し，$\cosh\theta=\frac{e^{\theta}+e^{-\theta}}{2}$，$\sinh\theta=\frac{e^{\theta}-e^{-\theta}}{2}$，$\tanh\theta=\frac{\sinh\theta}{\cosh\theta}$ と定義する。

(1) θ が実数全体を動くとき，点 $\mathrm{P}(\cosh\theta, \sinh\theta)$ の軌跡 C を座標平面上に図示せよ。
(2) (1)の曲線 C，直線 $y=0$，および直線 $y=(\tanh\theta)x$ で囲まれた図形の面積を θ の式で表せ。

こんな感じで算数をやります

曲線 $y=\frac{6}{x}$ $(x>0)$，直線 $y=6x$，および直線 $y=x$ で囲まれた図形の面積を求めよ。

- 双曲線上では 長方形の面積が一定 なので 三角形にしても同じ
- 等積変形すると ふつうの定積分で 面積がわかる

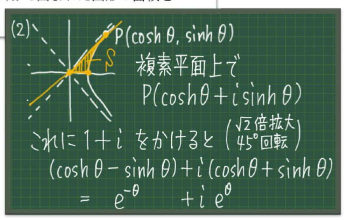


高3の内容を中1まで戻す

実数 θ に対し，$\cosh\theta=\frac{e^{\theta}+e^{-\theta}}{2}$，$\sinh\theta=\frac{e^{\theta}-e^{-\theta}}{2}$，$\tanh\theta=\frac{\sinh\theta}{\cosh\theta}$ と定義する。

(1) θ が実数全体を動くとき，点 $\mathrm{P}(\cosh\theta, \sinh\theta)$ の軌跡 C を座標平面上に図示せよ。
(2) (1)の曲線 C，直線 $y=0$，および直線 $y=(\tanh\theta)x$ で囲まれた図形の面積を θ の式で表せ。

- 45度回転すれば，双曲線関数の軌跡は反比例のグラフになる（直角双曲線の回転移動）
- $\sqrt{2}$ 倍拡大すると $y=\frac{1}{x}$



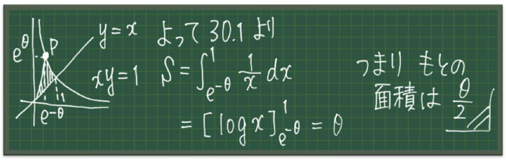
そして，授業から置換積分が消える

実数 θ に対し，$\cosh\theta=\frac{e^{\theta}+e^{-\theta}}{2}$，$\sinh\theta=\frac{e^{\theta}-e^{-\theta}}{2}$，$\tanh\theta=\frac{\sinh\theta}{\cosh\theta}$ と定義する。

(1) θ が実数全体を動くとき，点 $\mathrm{P}(\cosh\theta, \sinh\theta)$ の軌跡 C を座標平面上に図示せよ。
(2) (1)の曲線 C，直線 $y=0$，および直線 $y=(\tanh\theta)x$ で囲まれた図形の面積を θ の式で表せ。

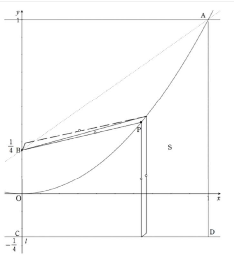
「あたらしい算数12」

- $\sqrt{2}$ 倍したので 面積の 2 倍
- ふつうの定積分 だけで出てくる



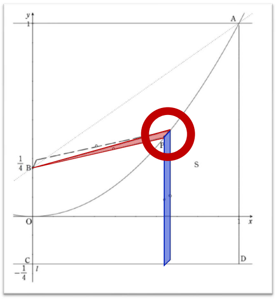
こんなレポートもありました（約10年前）

研究30.3 筑駒数学科教材集によると，放物線で囲まれた図形の面積を求める方法として，右図を用いて「台形 ABCD は放物線によって，1 : 2 の比に面積が分割される」とする考えがあるという。（2012 年，64 期当時中 3 生徒からのレポート）
これと同様の考えによって上の(2)を求めることはできるのだろうか……？



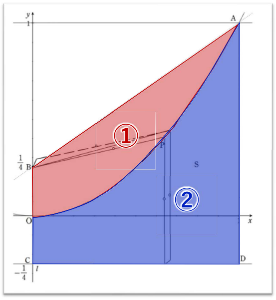
いったい何を言っているんだ

- B は焦点，P は放物線上の点
- 微小区間で図形を変化させると，放物線より上は三角形，下は平行四辺形が積み重なる，とのこと
- B は焦点なので，放物線上の点から焦点まで，準線までの距離は等しい
- よって放物線AOを輪郭にもつ図形AOBの面積が図形AOCDの面積の半分である（カバリエリの原理？）という主張



計算上，合ってはいるようなのだが……

- 実際……
  - 台形ABCDの面積は $\frac{1}{2}+\frac{5}{4}\times 1\div 2=\frac{7}{8}$
  - それを ①:② に分けた ② のほうは
    $\frac{7}{8}\times\frac{2}{3}=\frac{7}{12}$
  - x 軸より下の部分（長方形）をひくと
    $\frac{7}{12}-\frac{1}{4}=\frac{1}{3}$　私たちがよく知っている結果と一致……！
- だが本校専任教員 7 名の誰も（アイデアを出した本人も）なぜこれが合うのか分からない



筑駒数学科の授業の特色（事実）

- 授業の展開上，教師がまだ解いていない（解けないかもしれない）問題が，教室内でいきなり主課題になることがある
- 同じワークシートを準備したはずが，気づけばクラスによって全然違う問題と対峙する展開になることがある（一度そうなったら教師は懸命にそれを全クラスに持っていかなければならない）
- すごいアイデアを出した生徒が，その問題の本質をすべて理解しているとは限らない（「答が合っている」という事実だけがそこにあることもある） 理解していても言語化できるとは限らない
- 授業が終了しても，謎が謎のまま残ることがある

筑駒数学科の授業の特色（都市伝説）再び

- 「関数をヨイショする」「いい感じにぐわぁーッとする」などの謎の擬音で表現される概念が日々うみ出される？
- 3 次関数の極値を扱う授業で，50分間微積分が一度も出てこないことがある？
- 数学 I が週 2 単位しかない学校なのに，50分授業が教科書の例題 1 題で終わる（しかも最後まで解き終わらない）ことがある？
- ワークシートが「あたらしい算数12」と呼ばれる数 III の授業がある？
- 授業終了のチャイム後，休み時間の教室で生徒の授業が始まる？

微積分を使わない関数解析の話

- 私がやった授業ではないのですが，本校では数学科教科会（定例，今年度は木曜15:30～17:00）でかなり教材の話をしています
- 研究授業（校内外を問わず）は全員でネタ出し＆ちょっとしたゼミナールのようなこともしています
- 「微積分を使わない関数解析」は本校内で研究授業として公開されました（2017）
- ちなみに「今回のこの講演で何を話すか」なども今週木曜に少し教科会で相談してきました

微積分に頼らない3次関数の解析

- 例題

  関数 $y=x^3-12x$ の極小値と，そのときの x の値を求めよ。ただし，微分法は用いてはならない。

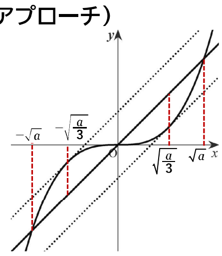
- ……とはいえ藪から棒に微分使用を禁止しているわけではなくこんな問題から始める

  $y=x^3$ の接線で，傾きが a となる接線の方程式をすべて求めなさい。

基本の形をまずは探究

$y=x^3$ の接線で，傾きが a となる接線の方程式をすべて求めなさい。

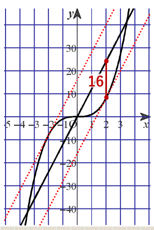
- $x^3=ax+b$ が重解をもつ（2 次関数と同様のアプローチ）
  - $x^3-ax-b=(x-\alpha)^2(x-\beta)$ が恒等式となるような α，β をさがすと
    $x^3-ax-b=x^3-(2\alpha+\beta)x^2+(\alpha^2+2\alpha\beta)x+\alpha^2\beta$
    係数比較で　$\beta=-2\alpha$
    $(a, b)=(3\alpha^2, 2\alpha^3)$
    $\alpha=\pm\sqrt{\frac{a}{3}}$　　$b=\pm\sqrt{\frac{4a^3}{27}}$
- この計算により，基本の形が分かった



ヨイショの万能性

関数 $y=x^3-12x$ の極小値と，そのときの x の値を求めよ。ただし，微分法は用いてはならない。

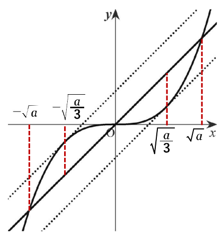
- 与えられた関数は，$y=x^3$ のグラフを直線 $y=12x$ で逆ヨイショしたもの
- つまり，$y=x^3$ のグラフに傾き12で接する直線を調べれば，逆ヨイショ後の極値がわかるはず
- 先ほどの計算から，その接線は $y=12x\pm16$ で，接点は $(-2, -8)$ と $(2, 8)$
- この $(2, 8)$ を逆ヨイショし，$x=2$ で極小値 -16



教科書の問題も斬れる

$x=1$ で極大値 6 をとり，$x=2$ で極小値 5 をとる3次関数 $f(x)$ を求めよ。

- 極大・極小をとる x の値の差が 1 なのは右図で $a=\frac{3}{4}$ の場合にあたる
- このとき本来の極大値と極小値の差は
  $2\sqrt{\frac{4}{27}\left(\frac{3}{4}\right)^{3}}=\frac{1}{2}$
- それが問題では 1 になっているので，求める関数は $y=2\left(x^3-\frac{3}{4}x\right)$ を平行移動したもの



教科書の問題も斬れる

$x=1$ で極大値 6 をとり，$x=2$ で極小値 5 をとる3次関数 $f(x)$ を求めよ。

- $y=2x^3-\frac{3}{4}x$ を右に $\frac{3}{2}$，上に $\frac{11}{2}$ だけ平行移動すればいいので

$$y=2\left(x-\frac{3}{2}\right)^3-\frac{3}{2}\left(x-\frac{3}{2}\right)+\frac{11}{2}$$

- ちなみに展開すると $y=2x^3-9x^2+12x+1$ だが
「開けるべき」という指導に果たして意味があるかどうか…（？）

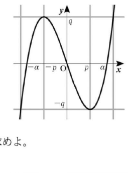
私はこんな教材を扱ったことがあります

- 微積分は特に“禁止”していない

高２数Ⅱ（３学期）

11 3 次曲線と直線の囲む面積（極値と方程式の解）
公式を覚える覚えないの話ではなく，純粋に気になるから調べる

活動 11.1 右図は，3 次関数 $f(x)=x(x+\alpha)(x-\alpha)$ について，$y=f(x)$ のグラフをかいたものである。（$\alpha>0$）
(1) 図中の p，q をそれぞれ α で表せ。
(2) $f(2p)=q$ であることを示せ。
(3) $S_1=\int_0^{\alpha}-f(x)\,dx$，$S_2=\int_{-p}^{2p}\{q-f(x)\}\,dx$ とおくとき，$S_1:S_2$ を求めよ。

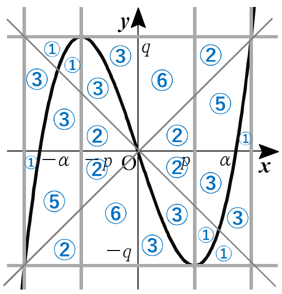


問題 11.2 前問で，$S_3=\int_0^{2p}\left\{\frac{q}{2p}x-f(x)\right\}dx$ とおくとき，$S_3:S_2$ を求めよ。

通称
「畳８枚理論」

そうしたら，こんなことになった

- 対角線を引いたりしてみると
囲まれる図形の面積が
すべて整数比で表せる
ことが判明
- しかも問題文にはなかった
右下がりの直線も引かれてる
（生徒が「引きましょう！」と
言ったので，言われるがまま）



筑駒数学科　関数指導の不易流行（私感）

- 具体から一般化したあと，また具体に戻す
  - 「検算」などではなく，数値の特殊性がどう活きているのかなど
問題のメタ読みに近い感覚
（数値をきれいにしようとすると問題の本質が出る）
- 表現の厳密さよりも“手触り”を重視
  - 小学校で算数が得意だった生徒が多い一方で，数学特有の
抽象化に困難を抱える生徒もいる（私自身がその感覚に近い）
- 計算技能にはこだわらない　50分の授業では本質だけをとらえる
  - 一方で計算の強い生徒もいるので，そういう生徒には
思う存分やってもらう

評価の話（参考までに）

- 私もいろいろ試行錯誤しているところですが……
- まず定期考査をきちんと納得いくまで作問すること（大前提）
  - 本校の定期考査は年 3 回，1 回50分
  - 無駄な問題はまず出していられない　本質をド真ん中から問う
  - その上で，知識・技能が中心になる問題と，思考・判断・表現が
中心になる問題を，大まかに分類して大問別に得点を集計
  - 大問別の得点を，観点別の目安として活用（最後は手作業も入る）
  - 本校の生徒の場合（良くも悪くも）定期考査の得点での評価が「公平」
だという空気があるので，定期考査の質は生徒との信頼関係を築く
上で最重要（私感）

こんな問題を出したことがあります

1 次の空欄にあてはまる数の例を 2 つあげ，数列 $\{a_n\}$ の一般項または漸化式とともに示せ。ただし例は，式で表せるものを示すこと。（本問は，答えのみでよい）

$$a_1=1,\ a_2=2,\ a_3=\boxed{},\ a_4=2$$

数学 B「数列」

こんな問題を出したことがあります

1 次の空欄に適する式や語句を，解答欄に書きなさい。
〔配点 15，ただし D は配点 0〕

関数 $y=ax^2$ のグラフ…① 上に異なる 2 点 $\mathrm{P}(p,\ ap^2)$，$\mathrm{Q}(q,\ aq^2)$ および点 $\mathrm{T}(t,\ at^2)$ をとるとき，

2 点 P，Q を通る直線の式は　$y=\boxed{\mathrm{A}}$　であり，
点 T で曲線①に接する直線の式は　$y=\boxed{\mathrm{B}}$　である。

2 つの式から，直線 PQ に平行で，曲線①に接する直線を②とすると，曲線①と直線②の接点の x 座標は $\boxed{\mathrm{C}}$ であることがわかる。

以後，この期末考査の答案においては，上記の性質を「$\boxed{\mathrm{D}}$定理」と呼び，必要に応じて用いてよいことにする。

A $y=$	B $y=$
C x 座標は	D（自由に命名してよい） 定理

中 3 数学
「関数 $y=ax^2$」

授業では
「カバリエリ的
割接定理（仮）」と命名

パフォーマンス評価をなんとか取り入れたい（願望）

- そこで……生徒にレポートの自由提出を課している
  - 学期に最低 1 本以上　なにか出せば基礎点を与える
  - 授業内容を発展させたレポート
授業では言えなかった　後で気づいたちょっとしたアイデアでもよし
  - もし何も思いつかなければ，問題集の演習ノートや
定期考査の復習レポートでもよい
- 「課題設定」「課題の遂行・展開」「振り返り」の 3 ポイントを提示
（それぞれを大まかに思考・判断，知識・技能，主体的態度に反映）

生徒に提示したルーブリック

課題の発見・設定

授業内容に沿った適切な課題を設定できたかの評価です（問題集の提出の場合は演習の分量なども含む）

優　2ポイント	良　1ポイント	加点なし　0ポイント
授業内容をこえて意欲的または独創的な課題設定をしている	適切な課題設定をしている	今学期の内容に合致しない／不足／他の提出物と重複する課題設定である

生徒に提示したルーブリック

課題の遂行・展開

課題に正対し，十分な表現や技能を発揮できたかの評価です

優　2ポイント	良　1ポイント	加点なし　0ポイント
解法や着想などの記述に飛躍がなく特に優れている	課題に正対した過不足なく技能・表現を発揮している	説明不足や論理の飛躍などが目立つ

生徒に提示したルーブリック

振り返りと自己評価

問題集の答えあわせやレポートの総括など，取り組みの自己分析に関する評価です

優　2ポイント	良　1ポイント	加点なし　0ポイント
客観的な振り返りや成果と自己評価に関する内容が特に豊富である	自らの解法や記述に論理的な誤りがないことが十分にチェックされている	論理的な誤りや理解不足に対してチェックされていない箇所が目立つ

なかなか実現できていないこと

- レポートを書くのが苦手な生徒は「表現」が弱いのか？
  - 授業を大きく動かす発言や，教室で喝采を浴びたアイデアを出す生徒が必ずしもすごいレポートを書いてくるわけではない
  - そういう生徒のテストの点がみんないないわけでもない
  - 「それ，写真撮ってGoogle Classroomで送って」ができるようになったおかげで，拾えているものも増えてはきたが……
- 形式にとらわれない「態度」の評価をどうするのか？
- 学力に関する個人差と評価への適切な反映
  - 本校の場合は「上下の差」よりも「前後の差」が大きい
  - 高 3 になると教師の知らないうちに間に合わせてくる生徒も多い

筑駒数学科のこれからの展望

- 教材，カリキュラムと授業の充実
  - 教材(数学)のもつ力で生徒の探究心を刺激し，意欲を高めるとともに，生徒のアイデアを教材(数学)に還元する
- つまり，「巻き込む」こと
  - 「オリンピックでのメダル」「外部発表会での成果・表彰」といった目に見える成果だけではなく，挑戦する生徒の裾野を広げる(先輩の力，つながり)
  - 日常のなかで挑戦する環境，粘り強く考える環境を整備するのは授業の役割

筑駒数学科のこれからの展望

- 教員研修会の継続実施
  - 「筑駒数学科の教材そのもの」はもとより……教材開発の枠組みを全国に共有し，情報交換したい
  - 中学～高等学校の場において「数学を創っていくこと」の意義生徒と教師，そして教師と教師(多ければ多いほどたぶんいい)
- 20年のSSHで，“お金のかからない(ように見える)”数学科が何にお金を使ってきたか ➡ 人を動かすこと
  (SSHがなければ出会えなかった人と人を出会わせるためのお金)

第128回　北数教　数学教育実践研究会
2024年 1 月27日(土)　13:40～15:10

駒場的・自由闊達な教材開発生活

筑波大学附属駒場中・高等学校
数学科 教諭(2023年度教科主任)
須藤　雄生
sudo.yu.gn@un.tsukuba.ac.jp
www.facebook.com/yu.sudo.46

筑波大学附属駒場中・高等学校
Junior & Senior High School at Komaba, University of Tsukuba