春はあけぼの夏は夜, 確率論はコインなげ

洞　彰人　(北海道大学大学院理学研究院)

数実研 Zoom,　2022 年 6 月 4 日

1. 序
2. コインなげモデル：有限試行
3. コインなげモデル：無限試行
4. Pascal 三角形

1. 序 — 確率論の発展

- Pascal と Fermat (17 世紀) : 賭けに関する書簡
- Laplace (1812) : 確率論の本
- Gauss (19 世紀前半) : の誤差法則, 正規分布 (旧 10 マルク紙幣)
- Brown (19 世紀前半) : 微粒子の不規則運動
- Einstein, Bachelier (1900 ごろ) : Brown 運動
- Wiener (1923) : 確率過程としての Brown 運動 (Wiener 過程)
- Kolmogorov (1933) : 確率論の公理的展開 (数学として確立)
- 伊藤清 (1942) : 確率過程の微分積分法, 確率微分方程式
- ······

Fields メダル (1936 –): 確率論の業績では 2006 年が初. 以後多数.

伊藤清: 第 1 回 Gauss 賞 (2006)

2. コインなげモデル　　＜有限試行＞

- n 回コインなげの標本 (根元事象) $\omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n)$, $\omega_j = 1$ or 0
- 全事象 (標本空間) $\Omega = \{0,1\} \times \{0,1\} \times \cdots \times \{0,1\} = \{0,1\}^n$

事象 (全事象の部分集合) $E \subset \Omega$

確率 $P : E \longmapsto P(E) = \sum_{\omega \in E} P(\omega)$.

1 の確率が p で, 0 の確率が $1-p$, 各回試行が独立 ($\Rightarrow$ 積構造) とすると,

$$P(\omega) = p^{\#\{j \,|\, \omega_j = 1\}} (1-p)^{\#\{j \,|\, \omega_j = 0\}}.$$

確率変数 (random variable) のことばで言えば

- $X_j : \Omega \longrightarrow \{0,1\}$, $\quad X_j(\omega) = \omega_j$
- $P(X_j = 1) = p$, $\quad P(X_j = 0) = 1-p$
- X_j たちが独立.

平均 (期待値)　$E[X_j] = 1 \cdot p + 0\,(1-p) = p.$

独立性から，$E[X_iX_j] = E[X_i]E[X_j] \quad (i \neq j).$

一般に，$E[f(X_i)g(X_j)] = E[f(X_i)]E[g(X_j)] \qquad (f, g$: 実数値関数).

n 回試行で 1 の出る回数 $S_n = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} X_j$

$$\text{標本平均} \quad \frac{S_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j \qquad (\text{標本 } \omega \text{ に応じて変化する量}).$$

大数の法則 (Law of Large Numbers) :　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n} = p$

- 収束の意味が問題
- 実は $P = P_{p,n}$，つまり, 確率 P が p と n に依存.

★ 大数の弱法則 (weak LLN)

$$\text{任意の } \varepsilon > 0 \text{ に対し,} \qquad P_{p,n}\Bigl(\Bigl|\frac{S_n}{n} - p\Bigr| > \varepsilon\Bigr) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

★ 大数の強法則 (strong LLN)

$$?? \text{ 任意の } \omega \in \Omega \text{ に対し,} \qquad \frac{S_n(\omega)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} p \ ??$$

これは言い過ぎ.

$$\omega = (1, 1, \cdots, 1) \text{ ならば} \quad \frac{S_n(\omega)}{n} = \frac{n}{n} = 1,$$

$$\omega = (0, 0, \cdots, 0) \text{ ならば} \quad \frac{S_n(\omega)}{n} = \frac{0}{n} = 0.$$

「すべての標本」でなく「確率 1」に修正？

$$P\Bigl(\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = p\Bigr) = 1.$$

しかし, p と n に依存する確率 $P_{p,n}$ しかないのに, この確率 P とは ??

★ 中心極限定理 (Central Limit Theorem)

$$\sqrt{n}\left(\frac{S_n}{n}-p\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} N\big(0, p(1-p)\big)$$: 平均 0, 分散 $p(1-p)$ の正規分布.

左辺の分散は $\dfrac{1}{n}V(S_n) = \dfrac{1}{n}\,n\,V(X_1) = E[(X_1-p)^2] = p(1-p)$.

収束の意味は

$$\lim_{n\to\infty} P_{p,n}\left(a \leqq \sqrt{n}\left(\frac{S_n}{n}-p\right) \leqq b\right) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi p(1-p)}} e^{-\frac{x^2}{2p(1-p)}}\,dx.$$

直観的に

$$\frac{S_n}{n} \approx p + \frac{1}{\sqrt{n}} N\big(0, p(1-p)\big), \qquad \frac{1}{\sqrt{n}}$$ のオーダーのゆらぎ

3. コインなげモデル　　≪無限試行≫

- 標本 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \cdots)$,　$\omega_j = 1$ or 0
- 全事象 $\Omega = \{0,1\} \times \{0,1\} \times \cdots = \{0,1\}^\infty$: 非可算 (連続) 集合 ($\cong [0,1]$)

事象とその確率をどうやって導入するか?

普通に考えれば, $P(\omega) = 0$.　e.g. $P\big((1,1,\cdots)\big) = 0$.

$E \subset \Omega$ に対し $P(E) = \sum_{\omega \in E} P(\omega)$ とするなら,

0 を非可算個たしあわせる??

確率論	平面幾何
全事象	$\mathbb{R}^2$
標本	点
事象	図形
確率	面積

k 回までの試行で決定される事象

$\epsilon_1, \cdots, \epsilon_k \in \{0,1\}$

$$E = \Big\{\omega = (\omega_n) \in \Omega \,\Big|\, \omega_1 = \epsilon_1, \cdots, \omega_k = \epsilon_k\Big\} \quad (\star)$$

の族を考えて, さらに $k \in \mathbb{N}$ を全部うごかす.

事象 E にわりあてるべき確率

$$P(E) = p^{\#\{j\in\{1,\cdots,k\}|\epsilon_j=1\}}(1-p)^{\#\{j\in\{1,\cdots,k\}|\epsilon_j=0\}} \qquad (\star\star)$$

全部 1 の事象 $\quad \big\{(1,1,\cdots)\big\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}\{\omega_1 = 1,\cdots,\omega_n = 1\}$

$$\begin{aligned} P\big((1,1,\cdots)\big) &= P\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty}\{\omega_1 = 1,\cdots,\omega_n = 1\}\Big) \\ &= \lim_{n\to\infty} P\big(\omega_1 = 1,\cdots,\omega_n = 1\big) = \lim_{n\to\infty} p^n = 0 \quad (\text{if } p<1) \end{aligned}$$

２つめの等号は, 確率 P の "連続性".

$(\star)$ の形の部分集合の可算個の交わりと合併で得られる部分集合全体 $\mathcal{E}$ を事象の集合と規定すると, 確率 P は $\mathcal{E}$ を定義域とする関数 $\;P:\mathcal{E}\longrightarrow[0,1]$.

$(\star\star)$ の定義を $\mathcal{E}$ まで拡張する.

こうして, 有限試行のときの確率の族 $\{P_{p,n}\}$ が n によらない確率 $P = P_p$ として統合される.

★ 大数の強法則 (sLLN)

$$P_p\Big(\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = p\Big) = 1.$$

“ほとんど確実に” 標本平均 $\dfrac{S_n}{n}$ が (1 回あたりの) 平均 p に収束する.

参考: 大数の弱法則 (wLLN) の証明

Chebyshev の不等式を準備

$$E[X^2] \geqq E[X^2 : |X| > a] \geqq E[a^2 : |X| > a] = a^2 P(|X| > a).$$

任意の $\varepsilon > 0$ に対し, X_j たちの独立性から

$$P\Big(\Big|\frac{S_n}{n} - p\Big| > \varepsilon\Big) \leqq \frac{1}{\varepsilon^2} E\Big[\Big(\frac{S_n}{n} - p\Big)^2\Big] = \frac{1}{\varepsilon^2} V\big(\frac{S_n}{n}\big) = \frac{V(X_1)}{\varepsilon^2 n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

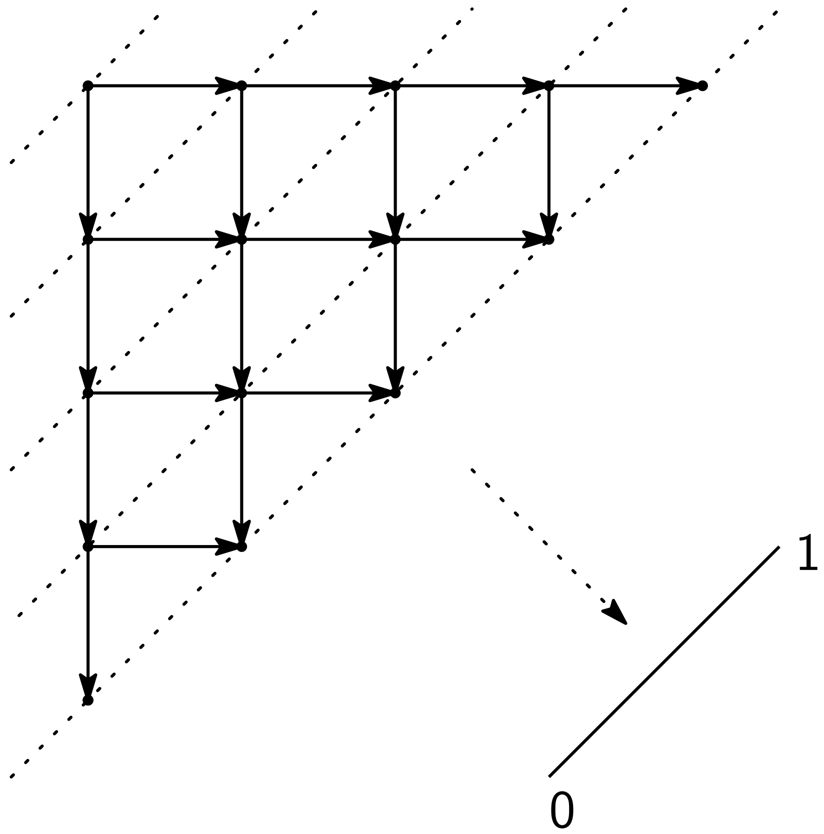
4. Pascal 三角形

前節までは $p \in [0,1]$ を固定した話であるが, p をうごかして見渡すと...

$$\mathbb{P} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_n, \quad \mathbb{P}_n = \big\{(n,k) \,\big|\, k \in \{0,1,\cdots,n\}\big\}, \quad n \in \{0,1,2,\cdots\}$$

各点線が $n = 0,1,2,\cdots$,

点線上で左から $k = 0,1,2,\cdots$.



$(0,0)$ からスタートし無限に延びる $\mathbb{P}$ 上の経路全体 $\mathfrak{T}$.

右向き矢印に 1, 左向き矢印に 0 を対応させると

$$\mathfrak{T} \;\cong\; \{0,1\}^{\infty}.$$

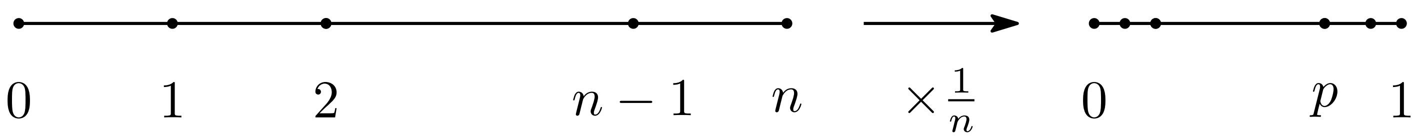
P_p は経路空間 $\mathfrak{T}$ 上の確率とみなせる.

$S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$ は $\mathfrak{T}$ 上の関数で, $S_n(\omega)$ は経路 (=標本) ω が第 n レベルで何番めの位置を通るかを示す. $(0,0)$ から (n,k) に至る経路数が ${}_nC_k$ だから,

$$P_p(S_n = k) = {}_nC_k\, p^k (1-p)^{n-k}.$$

★ 大数の強法則 (再掲): ほとんど確実に (P_p-almost surely)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = p.$$



つまり, 確率 P_p ではかると, ほとんど確実に経路の彼方が $1/n$ スケールでは p の位置に集中していく.

$\Longrightarrow$ 閉区間 $[0,1]$ が Pascal 三角形の理想境界 (前ページ図)

確率の決め方 $(\star)$, $(\star\star)$ を見ると,

1 対 1 の対応 (全単射)

$$\begin{tikzcd}
(n,k) \arrow[r] \arrow[d] & (n+1,k+1) \\
(n+1,k) &
\end{tikzcd}$$

$\mathfrak{T}$ 上の確率 P_p

$$\updownarrow$$

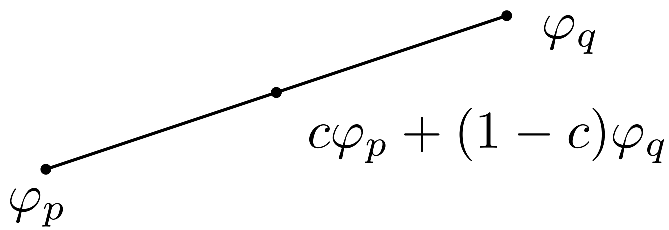
$\mathbb{P}$ 上の関数 $\varphi_p(n,k) = p^k(1-p)^{n-k}$.

▶ φ_p は $\mathbb{P}$ 上の (正規化された) 調和関数：

$$\varphi_p(n,k) = \varphi_p(n+1,k) + \varphi_p(n+1,k+1), \qquad \varphi_p(0,0) = 1.$$

$(\because)$ $p^k(1-p)^{n+1-k} + p^{k+1}(1-p)^{n+1-(k+1)} = p^k(1-p)^{n-k}(1-p+p)$

2 つの調和関数の凸結合 (=2 つの調和関数を結ぶ線分上の点) も調和関数.



さらに，連続無限個の調和関数の凸結合

$$\int_0^1 \varphi_p f(p)\,dp \quad \Big(ただし，f\ は確率密度関数：\ f(p) \geqq 0,\ \int_0^1 f(p)\,dp = 1\Big)$$

も調和関数．　実は，$\mathbb{P}$ 上の任意の非負値調和関数は，コインなげから来る調和関数に分解できる:

★ $\mathbb{P}$ 上の関数 $\varphi(n,k)$ が

$$\varphi(n,k) = \varphi(n+1,k) + \varphi(n+1,k+1), \quad \varphi(n,k) \geqq 0, \quad \varphi(0,0) = 1$$

をみたせば，$[0,1]$ 上の確率 μ がただ 1 つ存在して

$$\varphi(n,k) = \int_{[0,1]} p^k (1-p)^{n-k} \mu(dp) \qquad (※)$$

が成り立つ ($\mathbb{P}$ 上の調和関数の積分表示)．

例　(※) の特別な場合

$$\int_0^1 p^k(1-p)^{n-k}\delta_x(dp) = x^k(1-x)^{n-k} \quad (0 \leqq x \leqq 1)$$

$$\int_0^1 p^k(1-p)^{n-k}\frac{\delta_0+\delta_1}{2}(dp) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\int_0^1 p^k(1-p)^{n-k}1dp = B(k+1, n-k+1) = \frac{k!(n-k)!}{(n+1)!} = \frac{1}{(n+1)_nC_k}$$

$$\int_0^1 p^k(1-p)^{n-k}2p\,dp = \frac{2(k+1)!(n-k)!}{(n+2)!}$$

$$\int_0^1 p^k(1-p)^{n-k}\frac{8}{\pi}\sqrt{p(1-p)}dp = \frac{1}{2^{2n+1}}\frac{(2k+2)!(2n-2k+2)!}{(n+2)!(k+1)!(n-k+1)!}$$

$$\int_0^1 p^k(1-p)^{n-k}\frac{1}{\pi\sqrt{p(1-p)}}dp = \frac{1}{2^{2n}}\frac{(2k)!(2n-2k)!}{n!k!(n-k)!}$$

今日の話のハイライト

- コインなげモデルの大数の強法則
- Pascal 三角形上の調和関数の積分表示

ともに無限回の試行を包括する確率空間の設定のもとで記述可能.

ご清聴ありがとうございました