

Cauchy 集合列型中間値原理とその応用

和田文興

北海道札幌北高等学校

2026 年 7 月 2 日

要旨

本稿では、完備距離空間における中間値型原理の一つとして、Cauchy 的に一点へ収束する集合列と非負下半連続残差関数を用いた零点存在定理を述べる。この定理は、通常の中間値の定理を残差関数の零点存在問題として捉え直したものであり、Cantor の共通部分定理に基づく入れ子閉集合型の定式化を含む。さらに、Banach の縮小写像定理を本原理の系として証明し、不連続写像に対する簡単な不動点例、および移動球による近似零点の存在定理を示す。

1 はじめに

中間値の定理は、実区間上の連続関数に対し、符号変化から零点の存在を導く基本定理である。すなわち、連続関数 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ が

$$f(a) \leq c \leq f(b)$$

を満たすならば、ある $p \in [a, b]$ が存在して

$$f(p) = c$$

となる。この主張は、実数の順序構造と区間の連結性を背景としている。

本稿の研究の動機は、Banach の不動点定理の 1 次元の場合が中間値の定理から証明できる、という観察にある。実際、縮小写像 $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ に対して

$$F(x) = x - Tx$$

とおけば、十分大きな区間の両端で F の符号が変わることを示すことができる。したがって、通常の中間値の定理から $F(p) = 0$ 、すなわち $Tp = p$ を得る。このことから、中間値の定理を完備距離空間へ適切に拡張し、その拡張定理から一般の Banach の不動点定理が証明できれば、その拡張定理は有用な存在定理になるだろうと予想できる。本稿は、この考えを出発点として、完備距離空間における中間値型原理を定式化するものである。

一方、完備距離空間においては、順序、符号、凸結合などの線形構造は一般には存在しない。したがって、通常の形の中間値の定理をそのまま拡張することはできない。しかし、方程式

$$f(x) = c$$

を, 非負残差関数

$$\rho(x) = |f(x) - c|$$

の零点問題

$$\rho(x) = 0$$

と見れば, 距離空間においても自然な拡張が可能になる.

本稿で用いる完備性の基本的な背景には, Cantor の共通部分定理がある. その完備距離空間版は次のように述べられる. (X, d) を完備距離空間とし, 非空閉集合列 $\{F_n\}_n$ が

$$F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset \cdots$$

および

$$\text{diam}(F_n) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

を満たすならば,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$$

はただ一つの点からなる. つまり, 完備距離空間では, 直径が 0 に縮む入れ子閉集合列は, 空になることなく一点に収束する. この Cantor 型完備性原理は, 完備距離空間論および不動点理論の基本的な道具である [6, 8].

本稿では, Cantor 型定理に現れる入れ子閉集合列

$$F_1 \supset F_2 \supset \cdots$$

を, より対称的な Cauchy 集合列条件に置き換える. すなわち, 非空集合列 $\{C_n\}_n$ が

$$\sup\{d(x, y) : x \in C_m, y \in C_n\} \rightarrow 0 \quad (m, n \rightarrow \infty)$$

を満たすとき, $\{C_n\}_n$ は一点へ Cauchy 的に縮むと考える. この条件のもとで, 非負下半連続関数

$$\rho : X \rightarrow [0, \infty)$$

が

$$\inf_{x \in C_n} \rho(x) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

を満たすならば, ある点 $p \in X$ で

$$\rho(p) = 0$$

が成り立つことを示す. 本稿ではこの定理を

Cauchy 集合列型中間値原理

と呼ぶ.

Banach の縮小写像定理は, 完備距離空間における不動点論の出発点であり, 非線形解析および距離空間的不動点論の標準的文献で体系的に扱われている [6, 8]. 本稿の原理からも, Picard 反復

列の尾部集合を用いることで、Banach の縮小写像定理を自然に導くことができる．さらに、残差関数が下半連続であれば写像自体が不連続であっても扱えるため、連続写像に限らない不動点例も得られる．

本稿の定理は、Caristi の不動点定理や Ekeland の変分原理とも背景を共有している．Caristi の定理は下半連続関数を用いた完備距離空間上の不動点定理であり [2]、Ekeland の変分原理は非線形解析・最適化における基本原理である [7]．これらの原理およびその周辺結果は、非線形関数解析の標準的文献にも整理されている [6]．

近年も、完備性、Ekeland の変分原理、Caristi 型不動点定理、Takahashi 型最小化原理の同値性や拡張は盛んに研究されている．たとえば、距離空間および一般化距離空間における完備性と不動点性の関係については Cobzaş による概説的研究があり [3]、準一様空間や順序付き準距離空間における Ekeland 型原理の拡張も研究されている [4, 5]．また、重み付きグラフ上での Ekeland 型原理とその同値命題 [1]、および vector B -metric spaces における不動点定理と Ekeland 型原理 [9] など、2020 年以降にも関連する発展が見られる．以上のように、本稿の定理は、古典的中間値定理、Cantor 型完備性原理、Banach 型不動点定理、Caristi–Ekeland 型原理の間に現れる「近似零点を完備性によって真の零点へ収束させる」という共通構造を、Cauchy 集合列の言葉で整理するものである．したがって、本稿の定理を未発表の新定理と断定するのではなく、既知理論の間をつなぐ見通しのよい定式化として位置づけるのが自然である．

本稿の構成は次の通りである．第 2 節で Cauchy 集合列を定義する．第 3 節では、主定理である Cauchy 集合列型中間値原理を証明し、さらにそれが古典的中間値定理を含むことを示す．第 4 節では、不動点定理への応用として Banach の縮小写像定理、不連続写像の例、および移動球型零点定理を扱う．

2 準備

定義 2.1 (下半連続性). (X, d) を距離空間とする．関数 $\rho : X \rightarrow [0, \infty]$ が点 $p \in X$ で下半連続であるとは、任意の列 $\{x_n\}_n$ が $x_n \rightarrow p$ ($n \rightarrow \infty$) を満たすとき

$$\rho(p) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n)$$

が成り立つことをいう． ρ がすべての点で下半連続であるとき、単に下半連続という．

定義 2.2 (Cauchy 集合列). (X, d) を距離空間とし、 $\{C_n\}_n$ を X の非空集合列とする．この集合列 $\{C_n\}_n$ が Cauchy 集合列であるとは、

$$\sup\{d(x, y) : x \in C_m, y \in C_n\} \rightarrow 0 \quad (m, n \rightarrow \infty)$$

が成り立つことをいう．

註記 2.3. 上の条件は、任意の選び方 $x_n \in C_n$ に対して $\{x_n\}_n$ が Cauchy 列になることよりもやや強い一様な条件である．本稿では定理を簡潔にするため、この一様条件を採用する．

補題 2.4 (Cauchy 集合列の極限点). (X, d) を完備距離空間とし, $\{C_n\}_n$ を *Cauchy* 集合列とする. このとき, ある一意的な点 $p \in X$ が存在して

$$\sup_{x \in C_n} d(x, p) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

が成り立つ.

Proof. 各 n について $x_n \in C_n$ を一つ選ぶ. 仮定より

$$d(x_m, x_n) \leq \sup\{d(x, y) : x \in C_m, y \in C_n\} \rightarrow 0 \quad (m, n \rightarrow \infty)$$

であるから, $\{x_n\}_n$ は Cauchy 列である. X は完備なので, ある $p \in X$ が存在して $x_n \rightarrow p$ ($n \rightarrow \infty$) となる.

次に, $\sup_{x \in C_n} d(x, p) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) を示す. $\varepsilon > 0$ を任意に取る. Cauchy 集合列の仮定より, ある N_1 が存在して, $m, n \geq N_1$ ならば

$$\sup\{d(x, y) : x \in C_m, y \in C_n\} < \frac{\varepsilon}{2}$$

となる. また $x_m \rightarrow p$ ($m \rightarrow \infty$) より, ある N_2 が存在して, $m \geq N_2$ ならば

$$d(x_m, p) < \frac{\varepsilon}{2}$$

となる. $n \geq N_1$ とし, $m \geq \max\{N_1, N_2\}$ を取る. 任意の $x \in C_n$ について,

$$d(x, p) \leq d(x, x_m) + d(x_m, p) < \varepsilon$$

である. よって

$$\sup_{x \in C_n} d(x, p) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

が成り立つ.

一意性は明らかである. もし p, q がともにこの性質を満たせば, 任意の $x_n \in C_n$ に対して $x_n \rightarrow p$ ($n \rightarrow \infty$) かつ $x_n \rightarrow q$ ($n \rightarrow \infty$) であるから, 距離空間における極限の一意性より $p = q$ である. $\square$

3 Cauchy 集合列型中間値原理と古典的中間値定理

3.1 主定理

定理 3.1 (Cauchy 集合列型中間値原理). (X, d) を完備距離空間とする. $\rho : X \rightarrow [0, \infty)$ を下半連続関数とする. 非空集合列 $\{C_n\}_n$ ($C_n \subset X$) が *Cauchy* 集合列であり, さらに

$$\inf_{x \in C_n} \rho(x) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

を満たすとする。このとき、ある $p \in X$ が存在して

$$\rho(p) = 0$$

となる。

Proof. 補題より、ある $p \in X$ が存在して

$$\sup_{x \in C_n} d(x, p) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

が成り立つ。

仮定より

$$\inf_{x \in C_n} \rho(x) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

であるから、各 n について $y_n \in C_n$ を

$$\rho(y_n) \leq \inf_{x \in C_n} \rho(x) + \frac{1}{n}$$

となるように取ることができる。すると

$$\rho(y_n) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

である。

一方、 $y_n \in C_n$ であり、各 C_n は p に一様に近づくので、

$$d(y_n, p) \leq \sup_{x \in C_n} d(x, p) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

である。したがって $y_n \rightarrow p$ ($n \rightarrow \infty$) である。

ρ は下半連続だから、

$$\rho(p) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \rho(y_n) = 0.$$

また $\rho \geq 0$ であるから、

$$\rho(p) = 0$$

である。 □

註記 3.2. この定理は、入れ子閉集合列を仮定する Cantor 型の零点補題を含む。実際、 $F_1 \supset F_2 \supset \dots$ が非空集合列で

$$\text{diam}(F_n) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

を満たすなら、 $m, n \geq N$ に対して $F_m, F_n \subset F_N$ であるから

$$\sup\{d(x, y) : x \in F_m, y \in F_n\} \leq \text{diam}(F_N) \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty).$$

したがって、このような入れ子列は Cauchy 集合列である。

3.2 古典的中間値定理を含むこと

次に、本定理が通常の中間値の定理を特殊な場合として含むことを示す。

定理 3.3 (古典的中間値定理). $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ を連続関数とし, $c \in \mathbb{R}$ が

$$f(a) \leq c \leq f(b)$$

を満たすとする. このとき, ある $p \in [a, b]$ が存在して

$$f(p) = c$$

となる.

Proof. 端点で等号が成り立つ場合は明らかなので,

$$f(a) < c < f(b)$$

と仮定する.

$$g(x) = f(x) - c, \quad \rho(x) = |g(x)|$$

とおく. すると ρ は連続, 特に下半連続であり,

$$\rho(x) = 0 \iff f(x) = c$$

である.

区間二分法により, 閉区間列 $\{C_n\}_n$ を

$$C_n = [a_n, b_n]$$

で定める. まず $C_1 = [a, b]$ とする. $C_n = [a_n, b_n]$ が

$$g(a_n) \leq 0 \leq g(b_n)$$

を満たしているとする. 中点 $m_n = (a_n + b_n)/2$ を取る. もし $g(m_n) = 0$ ならば, そこで証明は終わる. そうでない場合,

$$g(a_n) \leq 0 \leq g(m_n)$$

または

$$g(m_n) \leq 0 \leq g(b_n)$$

のいずれかが成り立つので, 対応する半分の区間を C_{n+1} とする. この操作により,

$$g(a_n) \leq 0 \leq g(b_n)$$

を満たす閉区間列で

$$b_n - a_n = \frac{b - a}{2^{n-1}} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

となるものが得られる。したがって $\{C_n\}_n$ は Cauchy 集合列である。

また, f はコンパクト区間上連続なので一様連続である。よって

$$|f(b_n) - f(a_n)| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

一方,

$$g(a_n) \leq 0 \leq g(b_n)$$

より

$$\min\{|g(a_n)|, |g(b_n)|\} \leq |g(b_n) - g(a_n)| = |f(b_n) - f(a_n)| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

したがって

$$\inf_{x \in C_n} \rho(x) \leq \min\{\rho(a_n), \rho(b_n)\} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Cauchy 集合列型中間値原理を適用すると, ある $p \in [a, b]$ が存在して

$$\rho(p) = 0$$

となる。ゆえに

$$f(p) = c$$

である。 □

4 応用：不動点定理と移動球型零点定理

4.1 不動点原理

写像 $T : X \rightarrow X$ に対して

$$\rho_T(x) = d(x, Tx)$$

とおく。 $\rho_T(x) = 0$ は $Tx = x$ と同値である。したがって, Cauchy 集合列型中間値原理から次が従う。

系 4.1 (Cauchy 集合列型不動点原理). (X, d) を完備距離空間とし, $T : X \rightarrow X$ を写像とする。残差関数

$$\rho_T(x) = d(x, Tx)$$

が下半連続であるとする。非空集合列 $\{C_n\}_n$ ($C_n \subset X$) が *Cauchy* 集合列であり,

$$\inf_{x \in C_n} d(x, Tx) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

を満たすならば, T は不動点を持つ。すなわち, ある $p \in X$ が存在して

$$Tp = p$$

となる。

Proof. 定理を $\rho = \rho_T$ に適用すれば, ある $p \in X$ が存在して

$$\rho_T(p) = 0$$

となる. すなわち

$$d(p, Tp) = 0.$$

距離の分離公理より $p = Tp$ である. □

4.2 Banach の縮小写像定理

定理 4.2 (Banach の縮小写像定理). (X, d) を完備距離空間とし, $T : X \rightarrow X$ が縮小写像であるとする. すなわち, ある $q \in [0, 1)$ が存在して, 任意の $x, y \in X$ に対して

$$d(Tx, Ty) \leq qd(x, y)$$

が成り立つとする. このとき, T はただ一つの不動点を持つ.

Proof. 任意に $x_0 \in X$ を取り,

$$x_{n+1} = Tx_n$$

で Picard 反復列を定める. 縮小性より

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq q^n d(x_1, x_0)$$

が成り立つ. したがって $j > i \geq n$ ならば

$$d(x_i, x_j) \leq \sum_{k=i}^{j-1} d(x_k, x_{k+1}) \leq \frac{q^n}{1-q} d(x_1, x_0).$$

ここで集合列 $\{C_n\}_n$ を

$$C_n = \{x_k : k \geq n\}$$

で定める. m, n が十分大きければ, C_m と C_n の任意の点は Picard 列の十分後方の点であるから,

$$\sup\{d(u, v) : u \in C_m, v \in C_n\} \rightarrow 0 \quad (m, n \rightarrow \infty)$$

である. したがって $\{C_n\}_n$ は Cauchy 集合列である.

また

$$\inf_{x \in C_n} d(x, Tx) \leq d(x_n, Tx_n) = d(x_n, x_{n+1}) \leq q^n d(x_1, x_0) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

縮小写像は連続なので, $\rho_T(x) = d(x, Tx)$ も連続, したがって下半連続である. よって Cauchy 集合列型不動点原理より, ある $p \in X$ が存在して

$$Tp = p$$

となる.

最後に一意性を示す. p, r がともに不動点ならば,

$$d(p, r) = d(Tp, Tr) \leq qd(p, r).$$

$q < 1$ であるから $d(p, r) = 0$, すなわち $p = r$ である. $\square$

4.3 不連続写像への応用

次の例は, 写像 T 自体が不連続であっても, 残差関数 ρ_T が下半連続であれば本原理が適用できることを示す.

例 4.3 (不連続写像の不動点). $X = [0, 1]$ に通常の距離を入れる. 写像 $T : X \rightarrow X$ を

$$\begin{aligned} T(0) &= 0, \\ T(2^{-n}) &= 2^{-(n+1)} \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \end{aligned}$$

それ以外の点 x では

$$T(x) = 0$$

と定める. このとき T は各点 2^{-n} で不連続である. 実際, 2^{-n} に通常の点 x を近づけると $T(x) = 0$ であるが,

$$T(2^{-n}) = 2^{-(n+1)}$$

である.

残差関数

$$\rho_T(x) = |x - Tx|$$

は下半連続である. 実際, $x > 0$ が 2^{-n} 型でない点なら, その近傍には 2^{-n} 型の点は存在せず, 局所的に $\rho_T(x) = x$ である. また $a = 2^{-n}$ では

$$\rho_T(a) = 2^{-(n+1)}$$

であり, 近傍の通常点では $\rho_T(x) = x$ だから, $\liminf_{x \rightarrow a} \rho_T(x) \geq 2^{-(n+1)} = \rho_T(a)$ である. さらに 0 では $\rho_T(0) = 0$ であり, 下半連続性は明らかである.

いま集合列 $\{C_n\}_n$ を

$$C_n = \{2^{-k} : k \geq n\}$$

で定める. すると

$$\sup\{|x - y| : x \in C_m, y \in C_n\} \rightarrow 0 \quad (m, n \rightarrow \infty)$$

であるから, $\{C_n\}_n$ は Cauchy 集合列である. さらに

$$\inf_{x \in C_n} |x - Tx| = \inf_{k \geq n} 2^{-(k+1)} = 0.$$

したがって Cauchy 集合列型不動点原理より, T は不動点を持つ. 実際, その不動点は 0 である.

4.4 移動球による零点存在定理

Cauchy 集合列型中間値原理は，入れ子でない近似集合にも適用できる．これは，近似解の中心が動く状況で有用である．

命題 4.4 (移動球型零点定理). (X, d) を完備距離空間とし， $\rho : X \rightarrow [0, \infty)$ を下半連続関数とする．点列 $\{a_n\}_n \subset X$ と正数列 $\{r_n\}_n$ が

$$\{a_n\}_n \text{ は Cauchy 列, } r_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

を満たすとする．集合列 $\{C_n\}_n$ を

$$C_n = \{x \in X : d(x, a_n) \leq r_n\}$$

で定める．もし

$$\inf_{x \in C_n} \rho(x) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

ならば，ある $p \in X$ が存在して

$$\rho(p) = 0$$

となる．

Proof. 任意に $x \in C_m, y \in C_n$ を取る．すると

$$d(x, y) \leq d(x, a_m) + d(a_m, a_n) + d(a_n, y) \leq r_m + d(a_m, a_n) + r_n.$$

$\{a_n\}_n$ は Cauchy 列であり， $r_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$ であるから，

$$\sup\{d(x, y) : x \in C_m, y \in C_n\} \rightarrow 0$$

である．したがって $\{C_n\}_n$ は Cauchy 集合列である．Cauchy 集合列型中間値原理を適用して結論を得る． $\square$

註記 4.5. 旧来の入れ子閉集合型の定式化では， $C_{n+1} \subset C_n$ が必要である．しかし，移動球 $C_n = \overline{B}(a_n, r_n)$ は一般には入れ子にならない．したがって，上の命題は Cauchy 集合列型の定式化が持つ利点を示している．

参考文献

- [1] B. Ali, S. Cobzaş and M. D. Mabula, Ekeland variational principle and some of its equivalents on a weighted graph, completeness and the OSC property, *Axioms* **12** (2023), 247.
- [2] J. Caristi, Fixed point theorems for mappings satisfying inwardness conditions, *Transactions of the American Mathematical Society* **215** (1976), 241–251.

- [3] S. Cobzaş, Fixed points and completeness in metric and generalized metric spaces, *Journal of Mathematical Sciences* **250** (2020), no. 3, 475–535.
- [4] S. Cobzaş, Ekeland variational principle and its equivalents in T_1 -quasi-uniform spaces, *Optimization* **72** (2023), 2123–2154.
- [5] S. Cobzaş, Ekeland, Takahashi and Caristi principles in preordered quasi-metric spaces, *Quaestiones Mathematicae* **46** (2023), 791–812.
- [6] K. Deimling, *Nonlinear Functional Analysis*, Springer, Berlin, 1985.
- [7] I. Ekeland, On the variational principle, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **47** (1974), 324–353.
- [8] K. Goebel and W. A. Kirk, *Topics in Metric Fixed Point Theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Vol. 28, Cambridge University Press, 1990.
- [9] R. Precup and A. Stan, Fixed-point results and the Ekeland variational principle in vector B -metric spaces, *Axioms* **14** (2025), no. 4, 250.