＜ 特殊化で教材作り ＞

数実研会員：安田富久一

一般性のある定理、公式、命題にある前提条件を特殊化すると高校生で扱える問題になるものがあれば、高校数学の教材になる、という視点で例を紹介したい。そして、教材開発を行う際には問題集や参考書に頼りきらず、大学の内容にまで目を向けることのお勧めもしたい。

数学セミナー 1 月号のエレガントな解答を求むに次の問題があった。

問題

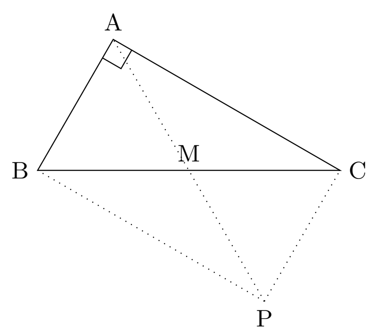
平面三角形 ABC に対して、辺長を $a = \mathrm{BC}, b = \mathrm{CA}, c = \mathrm{AB}$ と置きます。この三角形と同じ平面上（三角形の内部とは限らない）の点 P が、比の関係

$$\mathrm{AP} : \mathrm{BP} : \mathrm{CP} = a : b : c$$

を満たすとき、P を三角形 ABC の比心とよびます。その一例は、$\angle A =$ 直角のときには、P は辺 BC の中点に対する頂点 A の対称点です（四角形 ABPC が長方形になる点。下図参照)。

問 1　比心が存在するための $\triangle$ABC に関する必要十分条件を求めて下さい。

問 2　比心は 2 点より多くはあり得ませんが、ちょうど 2 点存在するとき、それらを結ぶ直線は、もとの三角形のどのような直線ですか？



この問題を次のように特殊化すると、ぐっと軟化し、しかも数学の力を付けた高校生にとってやり応えのある問題になる。

問題

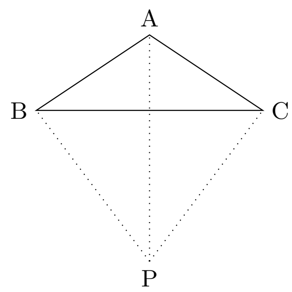
二等辺三角形の 3 辺の長さを $\mathrm{AB} = \mathrm{AC} = a$，$\mathrm{BC} = d$ とする。

$$\mathrm{AP} : \mathrm{BP} : \mathrm{CP} = d : a : a$$

を満たす点 P が存在するのは $\triangle$ABC がどんな三角形のときか述べよ。

（略説）

$e = \dfrac{d}{2}$ とおく。A$(0, \sqrt{a^2 - e^2})$，B$(-e, 0)$，C$(e, 0)$ となるように xy 軸を取る。P の座標を P(x, y) とする。AP $= dk$，BP $=$ CP $= ak$ となる x, y 及び正の数 k があることが必要十分条件である。つまり、



$$x^2 + (y - \sqrt{a^2 - e^2})^2 = d^2k^2 \tag{1}$$
$$(x + e)^2 + y^2 = a^2k^2 \tag{2}$$
$$(x - e)^2 + y^2 = a^2k^2 \tag{3}$$

(2) $-$ (3) より $4ex = 0$ となり、$e > 0$ より $x = 0$ でなければならない。この x の値を (2) に代入して、$y = \pm\sqrt{a^2k^2 - e^2}$ を得る。つまり、必要条件として、P$(\,0, \pm\sqrt{a^2k^2 - e^2}\,)$ でなければならない。これを (1) に代入して

$$a^2k^2 - e^2 \mp 2\sqrt{a^2k^2 - e^2}\sqrt{a^2 - e^2} + a^2 - e^2 = d^2k^2$$
$$(a^2 - 4e^2)k^2 + a^2 - 2e^2 = \pm 2\sqrt{a^2k^2 - e^2}\sqrt{a^2 - e^2} \quad (\because \ d = 2e\ )$$
$$(a^2 - 4e^2)^2k^4 + 2(a^2 - 4e^2)(a^2 - 2e^2)k^2 + (a^2 - 2e^2)^2 = 4(a^2k^2 - e^2)(a^2 - e^2)$$
$$(a^2 - 4e^2)^2k^4 - 2(a^4 + 4e^2a^2 - 8e^4)k^2 + a^4 = 0$$

(4) が少なくとも一つ正の解 k を持つ必要十分条件を求めれば良いが、それは $k^2 = K$ と置いて得られる次の K の方程式

$$(a^2 - 4e^2)^2K^2 - 2(a^4 + 4e^2a^2 - 8e^4)K + a^4 = 0 \tag{4}$$

が少なくとも一つ正の解を持つ必要十分条件を求めることと同値。この必要十分条件を K^2 の係数が 0 のときと 0 ではないときに分けて考察する。

- $a^2 - 4e^2 = 0$ つまり $a = 2e$ のとき、(4) は

  $$-2 \times 24e^4K + 16e^4 = 0 \quad , \quad \therefore\ K = \frac{1}{3}$$

  確かに正の解を持つので、条件 $a = 2e$ つまり $a = d$ は適している（これは正三角形である)。
- $a^2 - 4e^2 = 0$ つまり $a \neq 2e$ のとき、(4) の左辺を K の 2 次関数とみて、

  $$f(K) = (a^2 - 4e^2)^2K^2 - 2(a^4 + 4e^2a^2 - 8e^4)K + a^4$$

  とおく。まず、K^2 の係数は $(a^2 - 4e^2)^2 > 0$ なので、放物線 $y = f(K)$ は下に凸である。さらに、

  $$f(0) = a^4 > 0$$

  であるから、正の解を持つ条件は、$D \geqq 0$ 且つ放物線の軸が y 軸の右にあることである。

  $D \geqq 0$ は

  $$D/4 = (a^4 + 4e^2a^2 - 8e^4)^2 - a^4(a^2 - 4e^2)^2 = 16e^2(a^2 - e^2)(a^2 - 2e^2)(a^2 + 2e^2) \geqq 0$$
  $$\therefore\ a^2 \leqq e^2 \text{ または } a^2 \geqq 2e^2$$

  三角形の成立条件より、$2a > d$ つまり $a > e$ であり $a^2 > e^2$ であるから、$D \geqq 0$ となる条件は $a^2 \geqq 2e^2$ つまり次の不等式が条件である。

  $$a > \sqrt{2}e \tag{5}$$

次に軸は $K=\dfrac{a^4+4e^2a^2-8e^4}{(a^2-4e^2)^2}$ であるが、(5) が成り立てば

$$a^4+4e^2a^2-8e^4=(4+8-8)e^2>0 \quad \therefore\ \frac{a^4+4e^2a^2-8e^4}{(a^2-4e^2)^2}>0$$

であるので、(5) が成り立っていれば、放物線の軸は必ず y 軸の右にある。よって、求める条件は

$$a>\sqrt{2}e \quad , \quad a\neq 2e \tag{6}$$

以上より、求める必要十分条件は (4),(6) より

$$a \geqq \sqrt{2}e \quad \therefore \sqrt{2}\,a \geqq d \tag{7}$$

$\sqrt{2}\,a=d$ のとき、三角形は直角二等辺三角形になる。(7) は鋭角二等辺三角形であることを示す。

(答)　P が存在する条件は、三角形が鋭角二等辺三角形であること、である。