＜見事で面白い論法＞

数実研会員：安田富久一

かつて本を読んでいて出会った、こんなんあるんや、と思った証明方法、の紹介です。
その本は

『ガンマ関数入門』（著）E. アルティン　（訳・解説）上野健爾　日本評論社

という本で、この第 4 章「$\sin x$ との関係」p.38〜39 に書いてある内容を少し変形して紹介する。

命題

M を正の定数とする。$[0,1]$ 上の関数 $g(x)$ が次の 2 条件を満たすとする。

$$\begin{cases} 0 \leqq x \leqq 1 \text{ で常に } |g(x)| \leqq M \text{ がなりたつ。} & (1) \\ \dfrac{1}{4}\left\{g\left(\dfrac{x}{2}\right) + g\left(\dfrac{x+1}{2}\right)\right\} = g(x) & (2) \end{cases}$$

このとき、$g(x)$ は定数関数 $g(x)=0$ である。

この命題の証明が、“ ヘルグロッツ（Heglotz）の論法で ”、とコメント付で次のように述べられているが、なかなか見事で面白い。ただ、閉区間上の連続関数が最大値を必ず持つという高校では証明しない定理を使う。でも、感覚的に正しいと感じられる定理なので、感覚的に定理を伝えることで教材になると思い紹介する次第。

（証明）

$0 \leqq x \leqq 1$ のとき、

$$\begin{aligned} |g(x)| &= \frac{1}{4}\left|g\left(\frac{x}{2}\right) + g\left(\frac{x+1}{2}\right)\right| \quad (\because\ (2)) \\ &\leqq \frac{1}{4}\left|g\left(\frac{x}{2}\right)\right| + \frac{1}{4}\left|g\left(\frac{x+1}{2}\right)\right| && (3) \\ &\leqq \frac{M}{4} + \frac{M}{4} \quad (\because\ (1)) \\ &= \frac{M}{2} && (4) \end{aligned}$$

がわかる。(4) は、(1) において、M を $\dfrac{M}{2}$ に変えても成り立つことを示している。この議論を続けると (1) は $\dfrac{\frac{M}{2}}{2} = \dfrac{M}{2^2}$ に変えても成り立つことになる。つまり、数学的帰納法によりどんな自然数 n に対しても $[0,1]$ 上 $|g(x)| \leqq \dfrac{M}{2^n}$ が成り立つことになる。よって、$g(x)=0$ が常に成り立たねばならない。（証明終わり）