< 数学で遊ぶと教材に >

数実研会員：安田富久一

1　今回レポートの由来

ある図形の問題を解いていたとき、ヘロンの公式を使って見ようと思う場面があった。結果として、その問題がヘロンの公式を使って解けたわけではなかった。しかし、その問題とは関係の無いことを、たまたまふと頭に思い浮かべた。それがこれから紹介する問題。教材開発の参考になるかもしれないと思い紹介する。

【 問 題 】

$a+b>c$, $b+c>a$, $c+a>b$ のとき、次の不等式が成り立つことを示せ。

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2>\frac{1}{2}(a^4+b^4+c^4)$$

2　遊びたくなった動機

3 辺の長さが a,b,c の三角形の面積はヘロンの公式から

$$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \qquad \left(但し、s=\frac{a+b+c}{2}\right)$$

ルートの中は計算すると $-a^4-b^4-c^4+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$ となる。一瞬、

- 4 乗にマイナスが付き、その後ろでは目に 2 乗が映っている。
- ルートの中、負にならへんのん？　計算間違えたかなあ？

こんな感じがした。再度見直したが間違えて無さそう。じゃあ、

$$-a^4-b^4-c^4+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)>0$$

が常に成り立つことになる。ということは、わざわざ証明をする必要なく上記不等式は成立。じゃあ、三角形の面積との関連を使わないで上記不等式は証明するのん難しいんかなあ？

やってみよう ($\fallingdotseq$ 遊んでみよう)。ただ、三角形やなかったら三角形の面積は無意味なので、$a+b>c$, $b+c>a$, $c+a>b$ という条件は多分必要やろう。

という動機で遊ぼうとしたのを問題形式で書いたのが上記枠の問題。そして、次に示す証明が場合分けしないで気持ちよく出来、遊んで楽しめたので、場合分け回避を伝える教材としても役立つかもしれない。

3　証明

三角形の成立条件より、$a+b>c$, $b+c>a$, $c+a>b$ である。これは、$b+c>a>\max\{b-c,\,c-b\}$ と同値である。$c-b=-(b-c)$ より $\max\{b-c,\,c-b\}\geqq 0$ なので、三角形の成立条件は次の不等式

とも同値である。

$$(b+c)^2 > a^2 > (b-c)^2 \tag{1}$$

これを用いて次のように証明できる。

$$\begin{aligned} a^4+b^4+c^4-2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) &= (a^2)^2-2(b^2+c^2)a^2+b^4+c^4-2b^2c^2 \\ &= \{a^2-(b^2+c^2)\}^2-4b^2c^2 \end{aligned} \tag{2}$$

ところで、

$$\begin{aligned} a^2-(b^2+c^2) &< (b+c)^2-(b^2+c^2) = 2bc \\ a^2-(b^2+c^2) &> (b-c)^2-(b^2+c^2) = -2bc \\ \therefore \quad \left|a^2-(b^2+c^2)\right| &< 2bc \end{aligned} \tag{3}$$

(2),(3) より

$$a^4+b^4+c^4-2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) < 0 \quad \therefore\ a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 > \frac{1}{2}(a^4+b^4+c^4)$$

よって証明された。