第 137 回　数学教育実践研究会

生徒から教えられた、解法にはいろんな考えがある

令和 8 年 6 月 13 日（土）

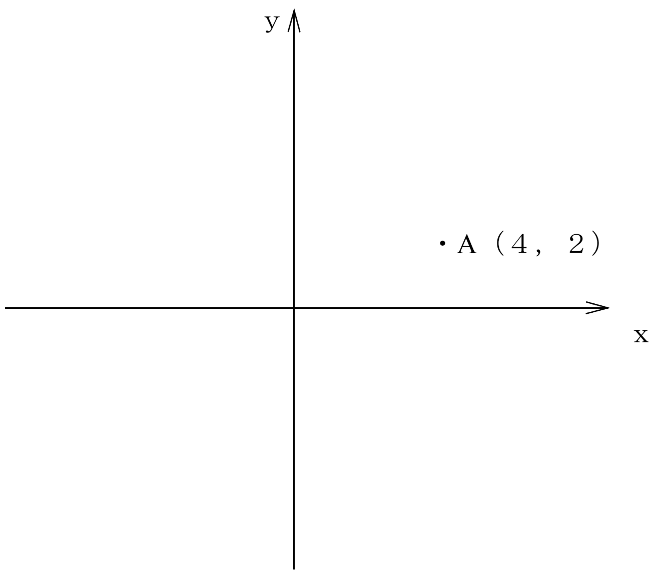
札幌啓成高等学校　海老名　浩之

前任校では学び直し、基礎学力の定着を目標に活動してきました。現在の高校に赴任して２年目で、いろいろ試行錯誤して授業に臨んでおりますが、考えさせられる解法をしてきた生徒の解答がありましたのでご紹介させていただきます。

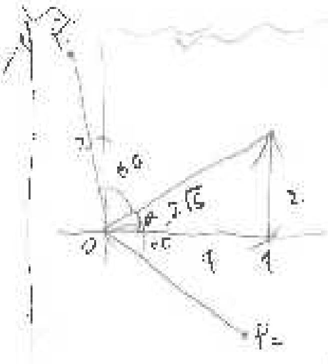
$\boxed{\text{問}}$

３点 O（０，０），A（４，２），B を頂点とする三角形が正三角形になるとき、点 B の座標を求めよ。

高２の毎日宿題で、第３章の図形と方程式を学習中なので、OA の垂直２等分線上に距離が $\sqrt{15}$ で解けると私は思いました。



まだ三角関数も習っていない中、まして見たことない加法定理を使っての解法だったので驚きました。以下に載せたのが生徒の解法です。少し見にくいですが、見たこともない加法定理の証明までしてきました。正直焦りました。



問題で求めるものは、

$$P\left(\cos\left(\arctan\left(\frac{1}{2}\right)\pm 60\right)\times 2\sqrt{5},\ \sin\left(\arctan\left(\frac{1}{2}\right)\pm 60\right)\times 2\sqrt{5}\right).$$

$\tan\alpha$, $\tan\beta$ の時、

$\sin(\alpha\pm\beta)$, $\cos(\alpha\pm\beta)$は、

三角形の面積、余弦定理より (ベクトルの回転移動でもっと早いかも)

プリントの図解、ここは省略します。

$$\sin(\alpha\pm\beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{\sqrt{\tan^2\alpha+1}\sqrt{\tan^2\beta+1}}$$

$$\cos(\alpha\pm\beta) = \frac{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}{\sqrt{\tan^2\alpha+1}\sqrt{\tan^2\beta+1}}$$

βが60の

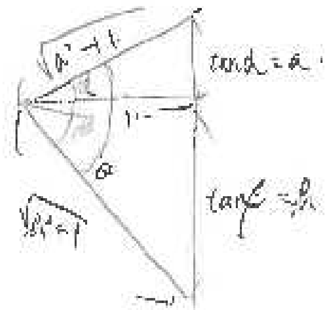
$$\sin(\theta\pm 60) = \frac{\frac{1}{2}\pm\sqrt{3}}{\sqrt{\frac{1}{4}+1}\sqrt{4}} \qquad \cos(\theta\pm 60) = \frac{1\mp\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$$

$$y = \frac{\frac{1}{2}\pm\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\times 2\sqrt{5} \qquad x = \frac{1\mp\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{5}}\times 2\sqrt{5}$$

$$y = 1\pm 2\sqrt{3} \qquad x = 2\mp\sqrt{3}$$

よって $(1+2\sqrt{3},\ 2-\sqrt{3})(1-2\sqrt{3},\ 2+\sqrt{3})$ //

ここより



$\tan\alpha = a$, $\tan\beta = b$

$$S = \frac{1}{2}\times 1\times(a+b)$$

$$S = \frac{1}{2}\sin\theta\sqrt{a^2+1}\sqrt{b^2+1}$$

$$\sin\theta = \frac{a+b}{\sqrt{a^2+1}\sqrt{b^2+1}}$$

$$\cos\theta = \frac{a^2+1+b^2+1-(a+b)^2}{2\cdot\sqrt{a^2+1}\sqrt{b^2+1}} = \frac{1-ab}{\sqrt{a^2+1}\sqrt{b^2+1}}$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\text{ より} = \frac{a+b}{1-ab} = \tan\theta$$ //