

【2026 年京都大学数学理系入試問題 6】

n は 3 以上の整数とする. 1 から n までの番号が書かれた n 枚の札が袋に入っている. ただし, 同じ番号が書かれた札はないとする. この袋から 3 枚の札を同時に取り出し, 一番大きな番号を X とする. X の期待値を求めよ.

この問題の 3 枚を k 枚に一般化し, 取り出した一番大きな番号を X_k , 一番小さな番号を Y_k として, X_k と Y_k の期待値を求めてみた.

問題 n は自然数 k 以上の整数とする. 1 から n までの連続する番号が書かれた n 枚のカードが袋に入っている. この袋から k 枚のカードを同時に取り出し, 一番大きな番号を X_k , 一番小さな番号を Y_k とする. ただし, 1 枚のカードを取り出したときはその番号を一番大きな番号かつ一番小さな番号とする.

(1) X_k の期待値を求めよ.

(2) Y_k の期待値を求めよ.

解答

(1) $1, \dots, \underline{X_k - 1}, X_k, \dots, n$

k 枚のカードを同時に取り出し, 一番大きな番号が X_k ($X_k \geq k$) であるとき, 他の $k-1$ 枚の数は $X_k - 1$ 以下であるから, 他の $k-1$ 枚の数の組合せは, ${}_{X_k-1}C_{k-1}$ 通りである.

$X_k = 1, 2, \dots, k-1$ のときも成り立つ.

X_k の確率を $P(X_k)$, X_k の期待値を $E(X_k)$ とおく.

$$P(X_k) = \frac{{}_{X_k-1}C_{k-1}}{{}_nC_k} = \frac{k(X_k-1)(X_k-2)\cdots(X_k-k+1)}{n(n-1)\cdots(n-k+1)} \text{ より,}$$

$$\begin{aligned} E(X_k) &= \sum_{X_k=1}^n X_k P(X_k) = \frac{k}{n(n-1)\cdots(n-k+1)} \sum_{X_k=1}^n X_k (X_k-1)\cdots(X_k-k+1) \\ &= \frac{k}{n(n-1)\cdots(n-k+1)} \cdot \frac{1}{k+1} \sum_{X_k=1}^n \{(X_k+1)X_k\cdots(X_k-k+1) - X_k(X_k-1)\cdots(X_k-k)\} \\ &= \frac{k}{n(n-1)\cdots(n-k+1)} \cdot \frac{1}{k+1} (n+1)n\cdots(n-k+1) \\ &= \frac{k(n+1)}{k+1} \quad \text{答} \end{aligned}$$

(2) $1, \dots, Y_k, \underline{Y_k+1}, \dots, n$

k 枚のカードを同時に取り出し, 一番小さな番号が Y_k ($Y_k \leq n-k+1$) であるとき, 他の $k-1$ 枚の数は Y_k+1 以上であるから, 他の $k-1$ 枚の数の組合せは, ${}_{n-Y_k}C_{k-1}$ 通りである.

$Y_k = n, n-1, n-2, \dots, n-k+1$ のときも成り立つ.

Y_k の確率を $P(Y_k)$, Y_k の期待値を $E(Y_k)$ とおく.

ここで, $Y_k = n+1-Z_k$ とおくと, Y_k の確率 $P(Y_k)$ は,

$$P(Y_k) = \frac{{}_{n-Y_k}C_{k-1}}{{}_nC_k} = \frac{{}_{Z_k-1}C_{k-1}}{{}_nC_k} = \frac{k(Z_k-1)(Z_k-2)\cdots(Z_k-k+1)}{n(n-1)\cdots(n-k+1)} \text{ より,}$$

$$\begin{aligned}
E(Y_k) &= \sum_{Y_k=1}^n Y_k P(Y_k) = \sum_{Z_k=1}^n (n+1-Z_k) \cdot \frac{{}^{Z_k-1}C_{k-1}}{{}^nC_k} \\
&= \sum_{Z_k=1}^n (n+1-Z_k) \cdot \frac{k(Z_k-1)(Z_k-2)\cdots(Z_k-k+1)}{n(n-1)\cdots(n-k+1)} \\
&= \frac{k}{n(n-1)\cdots(n-k+1)} \sum_{Z_k=1}^n \{(n+1)(Z_k-1)(Z_k-2)\cdots(Z_k-k+1) - Z_k(Z_k-1)(Z_k-2)\cdots(Z_k-k+1)\} \\
&= \frac{k}{n(n-1)\cdots(n-k+1)} \left\{ (n+1) \cdot \frac{1}{k} n(n-1)\cdots(n-k+1) - \frac{1}{k+1} (n+1)n(n-1)\cdots(n-k+1) \right\} \\
&= k \left\{ (n+1) \cdot \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} (n+1) \right\} \\
&= \frac{n+1}{k+1} \quad \text{答}
\end{aligned}$$

$$\text{補足} \quad E(X_k) + E(Y_k) = \frac{k(n+1)}{k+1} + \frac{n+1}{k+1} = n+1$$

(2026/6/13 tokioka@i4.gmob.jp)