

「複素数平面」上の直線と円の方程式およびその応用

北海道文教大学附属高等学校（非常勤）

杉本 幸司

§ 1. はじめに

数学Ⅱの「図形と方程式」において、座標平面を用いて平面図形とそれを表す方程式や不等式との関係を学習する。一方数学 C において「平面上の曲線と複素数平面」を学習する。

本稿では特に複素数平面に着目し、複素数平面を基礎とした解析幾何（図形と方程式）について調べる。特に直線の方程式および円の接線の方程式について複素数平面上で考察し、円の極線に関連する事項に応用する。また、不等式の表す領域について考察する。そもそも複素数については実数でない限り大小関係を定めることができないので、不等式を考えること自体がなじまないことである。しかし、円と直線に関しては不等式の表す領域を考えることができる。

以下では、図形は複素数平面上で考える。また、数学 C で学習する次の公式

公式 1.1 4 点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(\gamma)$, $D(\delta)$ ($\alpha \neq \beta$, $\gamma \neq \delta$) において、

$$AB \perp CD \iff \frac{\delta - \gamma}{\beta - \alpha} \text{ が純虚数}$$

を用いる。

§ 2. 直線の方程式

2.1 直線の方程式

数学 C では直線の方程式は線分の垂直二等分線として表している。また、複素数は平面ベクトルとも関係があるので、ベクトルを用いて直線の方程式を導いたように、たとえば

異なる 2 点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$ を通る直線の方程式は

$$z = (1-t)\alpha + t\beta \quad (t \text{ は実数})$$

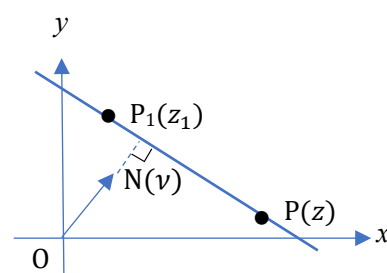
のように直線の方程式を表すこともできる（点 z は線分 AB を $t : (1-t)$ に分ける点である）。ここでは法線ベクトルから直線の方程式を導いたのを参考にして直線の方程式を表す。

0 と異なる複素数 v に対して、 v を表す点を N とし、原点を O とする。直線 ON に垂直な直線 l を v に垂直な直線、 v を l の法線方向を表す複素数ということにする。

公式 2.1 v を 0 と異なる複素数とする。点 $P_1(z_1)$ を通り、 v に垂直な直線の方程式は

$$\frac{z - z_1}{v} = -\frac{\bar{z} - \bar{z}_1}{\bar{v}}$$

[証明] 原点を O とし、 v を表す点を N とする。求める直線上の P_1 とは異なる点を $P(z)$ とする。



4 点 O , N , P_1 , P について $ON \perp P_1P$ であるから公式

1.1 より $\frac{z - z_1}{v}$ は純虚数、すなわち

$$\frac{z - z_1}{v} = -\overline{\left(\frac{z - z_1}{v}\right)}$$

である。このことから公式 2.1 が得られる。これは P が P_1 に一致する場合も成り立つ。

逆にこの方程式を満たす点 P は P_1 を通り、 v に垂直な直線上にある。■

例題 2.2 点 $2+i$ を通り、 $1-3i$ に垂直な直線の方程式を求めなさい。

[解答] 公式 2.1 より

$$\frac{z - (2+i)}{1-3i} = -\frac{\bar{z} - (2-i)}{1+3i}$$

両辺に $(1-3i)(1+3i)$ を掛けて整理すると

$$(1+3i)z + (1-3i)\bar{z} + 2 = 0 \quad \blacksquare$$

例題 2.2 で、求めた方程式の定数項は実数になったがこれは偶然ではなく一般に成り立つ事項である。実際、公式 2.1 で、両辺に $v\bar{v}$ を掛けて展開して整理すると

$$\bar{v}z + v\bar{z} - (v\bar{z}_1 + \bar{v}z_1) = 0$$

となるが、 $c = -(v\bar{z}_1 + \bar{v}z_1)$ とおくと

$$\bar{c} = \overline{-(v\bar{z}_1 + \bar{v}z_1)} = -(\bar{v}z_1 + v\bar{z}_1) = c$$

であるから c は実数である。つまり直線の方程式の一般型は、 v を 0 と異なる複素数として

$$\bar{v}z + v\bar{z} + c = 0 \quad (c \text{ は実数}) \quad \cdots \quad \textcircled{1}$$

と表される。

逆に、①を変形すると

$$\frac{z - \left(-\frac{c}{2\bar{v}}\right)}{v} = -\frac{\bar{z} - \left(-\frac{c}{2v}\right)}{\bar{v}}$$

となるので、

方程式①は直線を表し、 v に垂直

であることがわかる。

例題 2.3 方程式 $(4-3i)z + (4+3i)\bar{z} - 24 = 0$ の表す図形の概形をかきなさい。

[指針] これは直線の方程式であるから表す図形は直線である。いろいろなかき方があるが、ここではこの直線と実軸、虚軸それぞれの交点を求め、その2点を結ぶという方法でかいてみよう。

[解答] これは直線の方程式である。

直線と実軸の交点を求めるために $z = a$ (a は実数) とおいて代入すると

$$(4-3i)a + (4+3i)a - 24 = 0$$

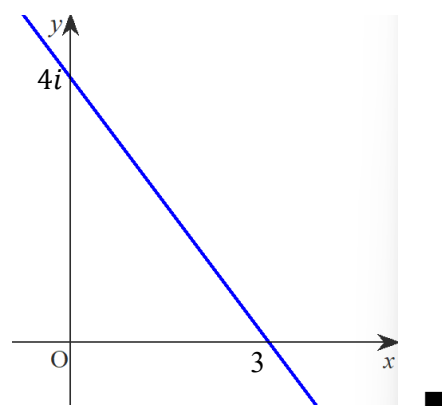
これより $a = 3$ となり実軸と 3 で交わる。

直線と虚軸の交点を求めるために $z = bi$ (b は実数) とおいて代入すると

$$(4-3i)bi + (4+3i)(-bi) - 24 = 0$$

これより $b = 4$ となり虚軸と $4i$ で交わる。

このことから次のような直線である。



2.2 点と直線の距離

平面解析幾何でヘッセの標準形といわれる方程式がある。それは $\sqrt{a^2 + b^2} = 1$, $p \geq 0$ として

$$ax + by = p$$

の形をしている直線の方程式のことである。このとき (a, b) は直線の単位法線ベクトル、 p は原点と直線の距離となることが知られている。

このことから類推して次のように定義しよう。

定義 2.4 $|y| = 1$, $p \geq 0$ として

$$\bar{y}z + y\bar{z} = p \quad \cdots \quad \textcircled{2}$$

の形をした直線の方程式を **ヘッセの標準形** (Hessian normal form) という。

②をヘッセの標準形というのは

- ・ $\bar{z}$ の係数は絶対値が 1 で直線の法線方向を表す
- ・ 右辺の半分は原点と直線の距離を表す

からである。すなわち次の公式 2.5 が成り立つ。

$$-z + \bar{z} = 10$$

原点と直線の距離は 5

(2) ヘッセの標準形は

$$\frac{4-3i}{5}z + \frac{4+3i}{5}\bar{z} = \frac{24}{5}$$

原点と直線の距離は $\frac{12}{5}$

(3) ヘッセの標準形は

$$\frac{5-12i}{13}z + \frac{5+12i}{13}\bar{z} = 2$$

原点と直線の距離は 1 ■

平行移動の考え方をを用いることにより、次の公式 2.7 が示される。

公式 2.7 点 $P_0(z_0)$ と直線 $l: \bar{v}z + v\bar{z} + c = 0$ の距離 d は

$$d = \frac{|\bar{v}z_0 + v\bar{z}_0 + c|}{2|v|}$$

[証明] 点 P_0 と直線 l を $-z_0$ だけ平行移動すると、 P_0 は原点 O に、 l はそれと平行な直線 l' にうつり、 d は O と l' の距離に等しい。

l' の方程式は、数学 I で学習する「グラフの平行移動」と同じように考えて

$$\bar{v}\{z - (-z_0)\} + v\{\bar{z} - (-\bar{z}_0)\} + c = 0$$

すなわち

$$\bar{v}z + v\bar{z} + (\bar{v}z_0 + v\bar{z}_0 + c) = 0$$

である。そのヘッセの標準形は

$$\pm \frac{\bar{v}}{|v|}z \pm \frac{v}{|v|}\bar{z} = \mp \frac{\bar{v}z_0 + v\bar{z}_0 + c}{|v|}$$

である。ただし複号は右辺 ≥ 0 となるように決める。

したがって、公式 2.5(2) より得られる。■

例題 2.8 次の点と直線の距離を求めなさい。

点 $3 + 2i$, 直線 $(4 - 3i)z + (4 + 3i)\bar{z} - 24 = 0$

[解答] 公式 2.7 より

公式 2.5 直線 l の方程式をヘッセの標準形②で表したとき

(1) γ は絶対値が 1 で直線 l の法線方向を表す

(2) 原点 $O(0)$ と直線 l の距離 d は

$$d = \frac{p}{2}$$

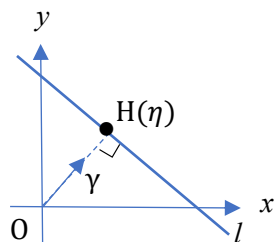
[証明] (1) 明らか。

(2) 原点 O から直線 l に垂線 OH を下ろす。点 H の表す複素数を η とする。

l は γ に垂直な直線だから、

$$\eta = t\gamma \quad (t \text{ は実数})$$

と表される。



H は l 上にあるから

$$\bar{\gamma}(t\gamma) + \gamma(t\bar{\gamma}) = p$$

である。これより $2|\gamma|^2 t = p$ となるが、 $|\gamma| = 1$ であるから

$$t = \frac{p}{2}, \text{ よって } \eta = \frac{p}{2}\gamma$$

となる。したがって O と l の距離 d は

$$d = |\eta| = \frac{p}{2}|\gamma| = \frac{p}{2}$$

となる。■

例題 2.6 次の直線をヘッセの標準形で表し、原点と直線の距離を求めなさい。

(1) 直線 $z - \bar{z} + 10 = 0$

(2) 直線 $(4 - 3i)z + (4 + 3i)\bar{z} - 24 = 0$

(3) 直線 $(-5 + 12i)z + (-5 - 12i)\bar{z} + 26 = 0$

[指針] 一般に、直線①をヘッセの標準形で表すためには両辺を $\pm|v|$ で割って

$$\pm \frac{\bar{v}}{|v|}z \pm \frac{v}{|v|}\bar{z} = \mp \frac{c}{|v|}$$

とする。ただし複号は右辺 ≥ 0 となるように決める。

[解答] (1) ヘッセの標準形は

$$\frac{|(4-3i)(3+2i) + (4+3i)(3-2i) - 24|}{2|4+3i|} = \frac{6}{5} \quad \blacksquare$$

$$\begin{aligned} \overline{(1-3i)}z + (1-3i)\bar{z} &= 2 \times (\sqrt{10})^2 \\ \text{すなわち} \\ (1+3i)z + (1-3i)\bar{z} &= 20 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

§3. 円の方程式

3.1 円の方程式

次の事項は数学 C で学習する。

公式 3.1 点 $A(\alpha)$ を中心とし、半径が r の円の方程式は

$$|z - \alpha| = r$$

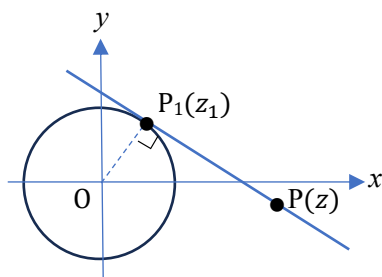
3.2 円の接線の方程式

ここでは公式 1.1 を使って、円 $|z| = r$ 上の点 $P_1(z_1)$ におけるこの円の接線の方程式を求めてみよう。

公式 3.2 円 $|z| = r$ 上の点 $P_1(z_1)$ におけるこの円の接線の方程式は

$$\bar{z}_1 z + z_1 \bar{z} = 2r^2$$

[証明] 求める接線上の P_1 とは異なる点を $P(z)$ とする。円の接線は接点を通る半径に垂直であることから $OP_1 \perp P_1P$ である。



公式 1.1 より $\frac{z-z_1}{z_1}$ は純虚数、すなわち

$$\frac{z-z_1}{z_1} = -\frac{\bar{z}-\bar{z}_1}{\bar{z}_1}$$

である。両辺に $z_1 \bar{z}_1$ を掛けて整理すると

$$\bar{z}_1 z + z_1 \bar{z} = 2|z_1|^2$$

となるが、 $P_1(z_1)$ は円周上にあるから $|z_1| = r$ で

$$\bar{z}_1 z + z_1 \bar{z} = 2r^2$$

となる。これは P が P_1 に一致する場合も成り立つ。■

例題 3.3 円 $|z| = \sqrt{10}$ 上の点 $1-3i$ におけるこの円の接線の方程式を求めなさい。

[解答] 公式 3.2 より

次に、円の外部の点から円に引いた接線の方程式について考えよう。

例題 3.4 点 $10+5i$ を通り、円 $|z| = 5$ に接する接線の方程式を求めなさい。

[解答] 接点を $P_1(z_1)$ とする。

点 P_1 におけるこの円の接線の方程式は

$$\bar{z}_1 z + z_1 \bar{z} = 50 \quad \cdots \quad (3)$$

である。③が $10+5i$ を通るから

$$(10+5i)\bar{z}_1 + (10-5i)z_1 = 50$$

すなわち

$$(2+i)\bar{z}_1 + (2-i)z_1 = 10 \quad \cdots \quad (4)$$

である。また、 $P_1(z_1)$ は円 $|z| = 5$ 上にあるから

$$z_1 \bar{z}_1 = 25 \quad \cdots \quad (5)$$

である。④の両辺に z_1 を掛けて⑤を用いると

$$25(2+i) + (2-i)z_1^2 = 10z_1$$

が得られる。 z_1^2 の係数を実数にするために両辺に

$2+i$ を掛けて整理すると

$$z_1^2 + (-4-2i)z_1 + 15 + 20i = 0 \quad \cdots \quad (6)$$

となる。左辺は因数分解できて

$$(z_1 - 5i)(z_1 - 4 + 3i) = 0$$

ゆえに $z_1 = 5i, 4-3i$ となる。

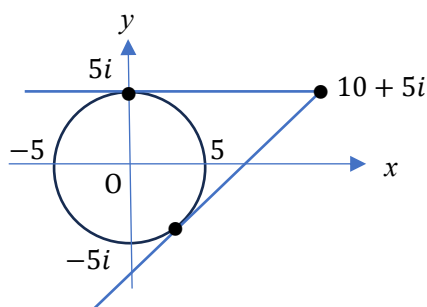
よって③に代入して求める接線の方程式は

$$-iz + i\bar{z} = 10, (4+3i)z + (4-3i)\bar{z} = 50 \quad \blacksquare$$

[検討] この型の問題では、一般には z_1 に関する 2 次方程式（例題 3.4 では⑥）を解くことがかなり大変になる。通常は 2 次方程式の解の公式を用いて解くのであるが、実際に計算するとルートの中が一般には複

素数になるから計算が面倒になる。

例題 3.4 の場合は、図をかいてみる。



図より明らかに接点の一つは $5i$ である。したがって⑥は $z_1 = 5i$ を解に持つ、すなわち⑥の左辺は $z_1 - 5i$ を因数に持つ。左辺を $z_1 - 5i$ で割ることによって左辺は因数分解できる。

右の組立除法より⑥の左辺は

$$\begin{array}{r|rrrr} 5i & 1 & -4-2i & 15+20i & \\ & & 5i & -15-20i & \\ \hline & 1 & -4+3i & 0 & \end{array}$$

$$(z_1 - 5i)(z_1 - 4 + 3i)$$

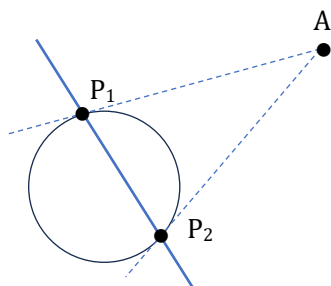
と因数分解される。

3.3 円の極線への応用

公式 3.2 を円の極線に応用してみる。以下の内容は参考文献 [1] の、円の極線についての記述に示唆されて調べてみたものである。

極線というのは次のような直線のことである。

定義 3.5 円の外部の点 A からこの円に引いた 2 本の接線の接点をそれぞれ P_1, P_2 とする。このとき直線 P_1P_2 を A に関する円の**極線**(polar)という。



次の公式 3.6 が成り立つ。

公式 3.6 円 $|z| = r$ の外部の点 $A(\alpha)$ に関する円の極線の方程式は

$$\bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} = 2r^2$$

[証明] 点 A からこの円に引いた 2 本の接線の接点をそれぞれ $P_1(z_1), P_2(z_2)$ とする。接線の方程式はそれぞれ

$$\bar{z}_1z + z_1\bar{z} = 2r^2, \quad \bar{z}_2z + z_2\bar{z} = 2r^2$$

である。これが $A(\alpha)$ を通るので

$$\bar{z}_1\alpha + z_1\bar{\alpha} = 2r^2, \quad \bar{z}_2\alpha + z_2\bar{\alpha} = 2r^2$$

となるが、これは $P_1(z_1), P_2(z_2)$ が直線 $\bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} = 2r^2$ 上にあることを示している。

したがって極線の方程式は

$$\bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} = 2r^2$$

である。■

例題 3.7 円 $|z| = \sqrt{5}$ の外部の点 $3+i$ に関する円の極線の方程式を求めなさい。

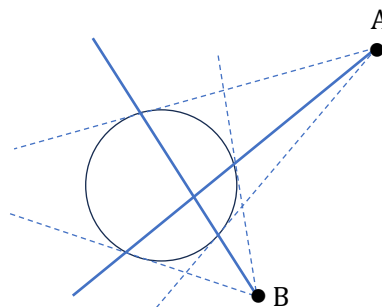
[解答] 公式 3.6 より

$$(3-i)z + (3+i)\bar{z} = 10 \quad \blacksquare$$

極線に関する例題をあと 3 つ (例題 3.8~3.10) 考えよう。

例題 3.8 円の外部の異なる 2 点 A, B について、次の定理が成り立つことを証明しなさい。

ポンスレ(Poncelet)の定理 A に関する円の極線が B を通るとき、 B に関する円の極線は A を通る。



[解答] 円の中心を原点 O にとり、 $A(\alpha), B(\beta)$ とする。円の半径を r とする。

A に関する円の極線の方程式は

$$\bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} = 2r^2$$

である。これが $B(\beta)$ を通るので

$$\bar{\alpha}\beta + \alpha\bar{\beta} = 2r^2 \quad \dots \quad (7)$$

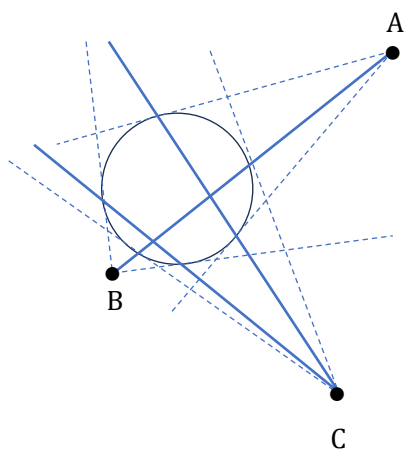
である。

B に関する円の極線の方程式は

$$\bar{\beta}z + \beta\bar{z} = 2r^2$$

であるから⑦よりこの極線は $A(\alpha)$ を通る。■

例題 3.9 円の外部の異なる 2 点 A, B に関する円の極線が円の外部の点 C で交わるとき, C に関する円の極線は直線 AB であることを証明しなさい。



[解答] 円の中心を原点 O にとり, $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(\gamma)$ とする。円の半径を r とする。

A, B に関する円の極線の方程式はそれぞれ

$$\bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} = 2r^2, \quad \bar{\beta}z + \beta\bar{z} = 2r^2$$

である。この 2 直線がともに $C(\gamma)$ を通るので

$$\bar{\alpha}\gamma + \alpha\bar{\gamma} = 2r^2, \quad \bar{\beta}\gamma + \beta\bar{\gamma} = 2r^2 \quad \dots \quad (8)$$

である。

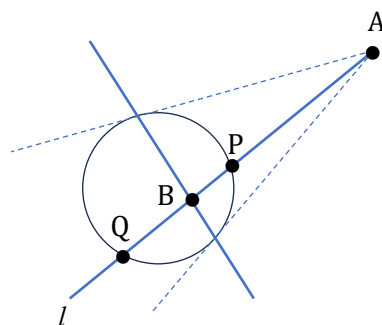
C に関する円の極線の方程式は

$$\bar{\gamma}z + \gamma\bar{z} = 2r^2$$

であるから⑧よりこの極線は 2 点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$ を通る。

したがって, C に関する円の極線は直線 AB である。■

例題 3.10 円の外部の点 A と A を通る直線 l がある。 l と円は異なる 2 点 P, Q で交わるとする。A に関する円の極線と l の交点を B とする。このとき P, Q は線分 AB をそれぞれ同じ比で内分, 外分することを証明しなさい。



[一般に, このような 4 点 A, B, P, Q を調和列点 (harmonic range of points) という。]

[解答] 円の中心を原点 O にとり, $A(\alpha)$, $B(\beta)$ とする。円の半径を r とする。

A に関する円の極線が B を通るので, 例題 3.8 の⑦の式が成り立つ。

l は 2 点 A, B を通るので, l の方程式は

$$z = (1-t)\alpha + t\beta \quad (t \text{ は実数}) \quad \dots \quad (9)$$

とかける。 l と円の交点 P, Q を求めるためにこれを円の方程式 $z\bar{z} = r^2$ に代入して

$$\{(1-t)\alpha + t\beta\}\{(1-t)\bar{\alpha} + t\bar{\beta}\} = r^2$$

となる。これを展開して整理すると

$$(|\alpha|^2 - \bar{\alpha}\beta - \alpha\bar{\beta} + |\beta|^2)t^2$$

$$- (2|\alpha|^2 - \bar{\alpha}\beta - \alpha\bar{\beta})t + |\alpha|^2 - r^2 = 0$$

となるが, ⑦よりこれは

$$(|\alpha|^2 + |\beta|^2 - 2r^2)t^2$$

$$- 2(|\alpha|^2 - r^2)t + |\alpha|^2 - r^2 = 0$$

となる。いま, $|\alpha|^2 + |\beta|^2 - 2r^2 = p$, $|\alpha|^2 - r^2 = q$ とおくと

$$pt^2 - 2qt + q = 0$$

となる。この 2 次方程式の解を $t = t_1, t_2$ とする。これらを⑨に代入したときの z が 2 点 P, Q を表す。P, Q は異なる 2 点だから t_1, t_2 は異なる 2 つの実数であ

り, P, Q は A とは異なるから $t_1, t_2 \neq 0$ である。

結論を証明するためには

$$\frac{1-t_1}{t_1} = -\frac{1-t_2}{t_2}$$

を示せばよい。解と係数の関係から

$$t_1 + t_2 = \frac{2q}{p}, \quad t_1 t_2 = \frac{q}{p}$$

である。よって

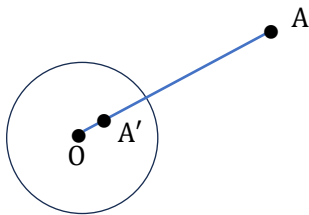
$$\frac{1-t_1}{t_1} + \frac{1-t_2}{t_2} = \frac{t_1+t_2}{t_1 t_2} - 2 = \frac{\frac{2q}{p}}{\frac{q}{p}} - 2 = 0$$

となるからこれが示された。■

最後に鏡像との関係について述べる。

よく知られているように、鏡像の定義は次のとおりである。

定義 3.11 点 O を中心とし、半径が r の円がある。2 点 A, A' が O を端点とする半直線上にあり、 $OA \cdot OA' = r^2$ となるとき、 A と A' は円に関して互いに鏡像(reflection)であるという。



鏡像は「1 次分数変換」といわれる変換と関係があることが知られている。

鏡像に関して、次の例題 3.12 を考えよう。

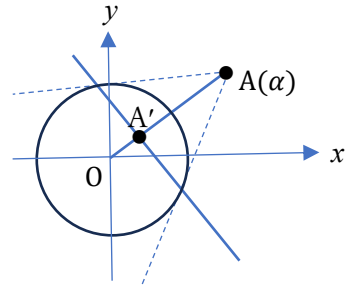
例題 3.12 点 O を中心とする円とその円の外部の点 A がある。 A に関する円の極線と直線 OA の交点を A' とすると、 A と A' は円に関して互いに鏡像であることを証明しなさい。

[解答] 円の中心 O を原点にとり、 $A(\alpha)$ とする。円の半径を r とする。

A に関する円の極線の方程式は

$$\bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} = 2r^2 \quad \dots \quad (10)$$

である。直線(10)と直線 OA の交点を $A'(\alpha')$ とする。



A' は直線 OA 上にあるから、

$$\alpha' = t\alpha \quad (t \text{ は実数})$$

と表される。

また、 A' は直線(10)上にあるから

$$\bar{\alpha}(t\alpha) + \alpha(t\bar{\alpha}) = 2r^2$$

である。これより $2|\alpha|^2 t = 2r^2$ となるから

$$t = \frac{r^2}{|\alpha|^2}, \quad \text{よって} \quad \alpha' = \frac{r^2}{|\alpha|^2} \alpha$$

となる。したがって

$$OA' = |\alpha'| = \frac{r^2}{|\alpha|^2} |\alpha| = \frac{r^2}{|\alpha|}$$

となる。

一方、 $OA = |\alpha|$ である。

したがって $OA \cdot OA' = r^2$ となるから A と A' は円に関して互いに鏡像である。■

なお、例題 3.12 の解答で、 α' は

$$\alpha' = \frac{r^2}{|\alpha|^2} \alpha = \frac{r^2}{\alpha\bar{\alpha}} \alpha = \frac{r^2}{\bar{\alpha}}$$

となる。

一般に 0 と異なる複素数 α に対して $\frac{r^2}{\bar{\alpha}}$ を対応させる変換を、円に関する反転(inversion)という。特に円の半径 r が $r=1$ (単位円) のときは

$$\alpha' = \frac{1}{\bar{\alpha}}$$

となる。

§ 4 不等式の表す領域

4.1 円の方程式と不等式の表す領域

点 $A(\alpha)$ を中心とし、半径が r の円の方程式は

$$|z - \alpha| = r$$

であった。さらに、平面上の点 $P(z)$ について

$$|z - \alpha| > r \iff AP > r$$

$$|z - \alpha| < r \iff AP < r$$

であるから次の事項が成り立つ。

公式 4.1 円 $|z - \alpha| = r$ を C とする。

$|z - \alpha| > r$ の表す領域は円 C の外部

$|z - \alpha| < r$ の表す領域は円 C の内部

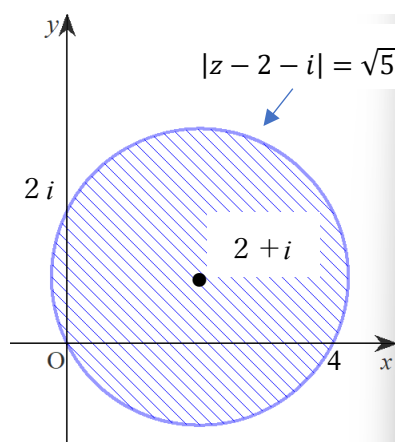
(注意) $|z - \alpha| \geq r$ や $|z - \alpha| \leq r$ の表す領域は、円 C 上の点を含む。

例題 4.2 不等式

$$|z - 2 - i| < \sqrt{5}$$

の表す領域を図示しなさい。

[解答] 求める領域は、中心 $2 + i$ 、半径 $\sqrt{5}$ の円の内部である。したがって下の図の斜線部分である。ただし、境界線を含まない。



4.2 直線の方程式と不等式の表す領域

z および $\bar{z}$ に関する 1 次不等式

$$\bar{v}z + v\bar{z} + c > 0 \quad [<0, \geq 0, \leq 0]$$

を考えよう。ただし、 v は 0 と異なる複素数の定数、 c は実数の定数である。いま

$$f(z) = \bar{v}z + v\bar{z} + c$$

とおく。

$f(z)$ はどのような複素数 z に対しても実数である。実際、 c は実数の定数であるので

$$\overline{f(z)} = \overline{\bar{v}z + v\bar{z} + c} = v\bar{z} + \bar{v}z + c = f(z)$$

となるからである。したがってはじめの不等式はすべての複素数 z に対して意味を持つ。

また、方程式 $f(z) = 0$ は直線の方程式である。

0 と異なる複素数 v に対して、0 から v へ向かう向きを v の向きということにする。

公式 4.3 v を 0 と異なる複素数の定数、 c を実数の定数とし

$$f(z) = \bar{v}z + v\bar{z} + c$$

とする。直線 $f(z) = 0$ を l とする。このとき

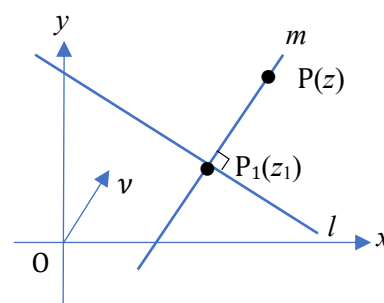
(1) 不等式 $f(z) > 0$ の表す領域は直線 l の、 v の向きと同じ側の部分

(2) 不等式 $f(z) < 0$ の表す領域は直線 l の、 v の向きと反対側の部分

(注意) $f(z) \geq 0$ や $f(z) \leq 0$ の表す領域は、直線 l 上の点を含む。

[証明] 直線 $l: \bar{v}z + v\bar{z} + c = 0$ において、 v は l の法線方向を表す複素数である。 l 上の 1 点 $P_1(z_1)$ をとる。このとき $\bar{v}z_1 + v\bar{z}_1 + c = 0$ である。

$P_1(z_1)$ を通り、 l と垂直な直線 m を考える。 m 上に点 $P(z)$ をとると、 $z = z_1 + vt$ (t は実数) と表される。このとき



$$\begin{aligned}
 f(z) &= \bar{v}z + v\bar{z} + c \\
 &= \bar{v}(z_1 + vt) + v(\bar{z}_1 + \bar{v}t) + c \\
 &= 2|v|^2t + (\bar{v}z_1 + v\bar{z}_1 + c) \\
 &= 2|v|^2t
 \end{aligned}$$

となる。 $v \neq 0$ より $|v|^2 > 0$ であるから $f(z)$ の符号は t の符号と一致する。

したがって、 $f(z)$ の符号について

・ $f(z) > 0$ となるのは $P(z)$ が $P_1(z_1)$ からみて v の向きと同じ側にある

・ $f(z) < 0$ となるのは $P(z)$ が $P_1(z_1)$ からみて v の向きと反対側にある

ということがわかり、公式 4.3 が得られる。■

例題 4.4 不等式

$$(4 - 3i)z + (4 + 3i)\bar{z} - 24 < 0$$

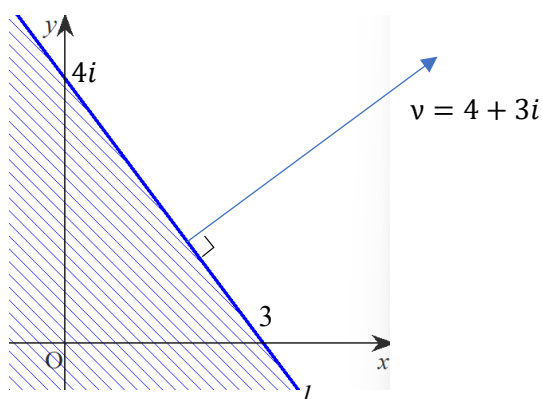
の表す領域を図示しなさい。

[解答] 例題 2.3 で方程式

$$(4 - 3i)z + (4 + 3i)\bar{z} - 24 = 0$$

の表す直線を図示した。この直線を l とする。

この不等式の表す領域は公式 4.3(2)より、直線 l の $v = 4 + 3i$ の示す向きと反対側の部分、すなわち直線 l の下側の部分である。



上の図の斜線部分である。ただし、境界線を含まない。■

なお、求めた領域内から適当な 1 点を選んで、その点を与えられた不等式を満たすことを確認するとよ

い。この問題では直線 $(4 - 3i)z + (4 + 3i)\bar{z} - 24 = 0$ を境界線として、複素数平面が分けられる 2 つのブロックのいずれかである。ここで、たとえば点 0 を不等式に代入してみると、

$$(4 - 3i)0 + (4 + 3i)0 - 24 < 0$$

となり不等式を満たす。よって、求める領域は 0 を含む領域である。ただし、境界線を含まない。

4.3 連立不等式の表す領域など

例題 4.5 連立不等式

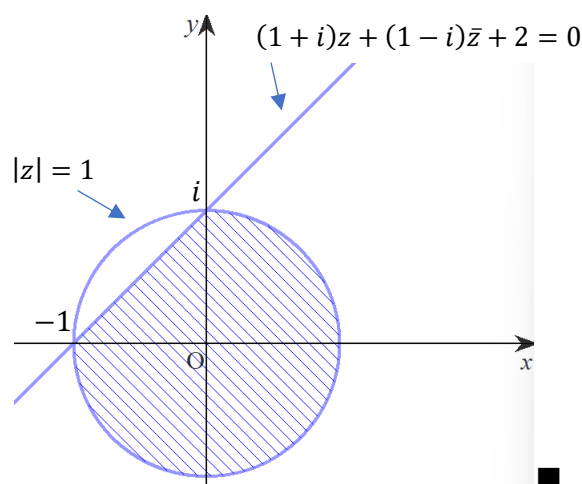
$$\begin{cases} |z| \leq 1 & \dots \text{⑪} \\ (1 + i)z + (1 - i)\bar{z} + 2 \geq 0 & \dots \text{⑫} \end{cases}$$

の表す領域を図示しなさい。

[解答] 不等式⑪の表す領域は中心0、半径1の円の内部である。

次に、方程式 $(1 + i)z + (1 - i)\bar{z} + 2 = 0$ の表す図形は直線で、実軸、虚軸とそれぞれ点 $-1, i$ で交わる。不等式⑫の表す領域はこの直線の下側である。

求める領域は 2 つの領域の共通部分、すなわち下の図の斜線部分である。ただし、境界線を含む。



例題 4.6 不等式

$$(|z| - 1)\{(1 + i)z + (1 - i)\bar{z} + 2\} \geq 0$$

の表す領域を図示しなさい。

[解答] どのような複素数 z に対しても

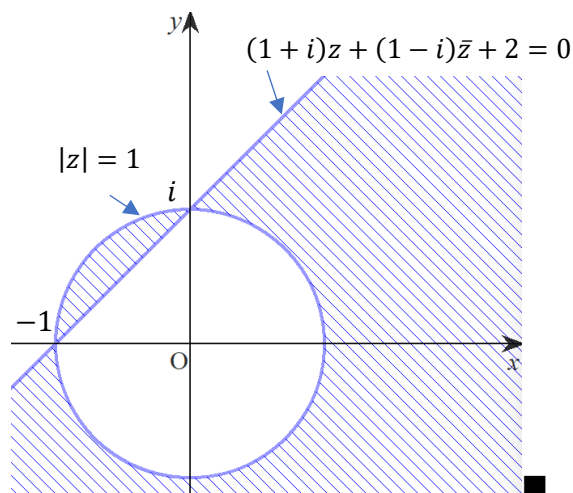
$$|z| - 1, (1 + i)z + (1 - i)\bar{z} + 2$$

は実数である。したがってこの不等式は

$$\begin{cases} |z| - 1 \geq 0 \\ (1+i)z + (1-i)\bar{z} + 2 \geq 0 \end{cases} \quad \text{または}$$

$$\begin{cases} |z| - 1 \leq 0 \\ (1+i)z + (1-i)\bar{z} + 2 \leq 0 \end{cases}$$

と同値である。よって、求める領域は、この2つの連立不等式の表す領域を合わせたもの、すなわち下の図の斜線部分である。ただし、境界線を含む。



《参考文献》

[1] 加藤文元, チャート研究所共編 『チャート式 数学Ⅱ+B』, 数研出版, 2023.

[2] 杉本幸司 『「複素数平面」で解く「図形と方程式」』, Gakken, 2019.

(2026 年 8 月 18 日)

§5. おわりに

本稿では複素数平面上で直線の方程式および円の接線の方程式について考察した。その応用例として円の極線の方程式や鏡像について述べた。これについては参考文献 [1] の、円の極線についての記述に示唆されて調べてみたものであり、面白い性質があることがわかった。また、不等式の表す領域についても検討した。はじめに述べたように、複素数平面上で不等式の表す領域を考えることはなじまないように感じられるが、円と直線については考えることができるところが面白い。

座標平面上の解析幾何の理論などを参考にするといろいろ考察可能であろう。たとえば2直線の平行と垂直は2直線の法線方向を表す複素数の関係より理解できる。また、円と直線の位置関係は円の半径および円の中心と直線の距離の関係より理解できる。

平面解析幾何で知られている事項を複素数平面上で確認したり、複素数平面を用いて図形の性質を証明したりする手法は、それに習熟することは容易ではないが面白いものと思った。今後もいろいろ研究してみたいと思う。