線形代数の視点から見た 2 階同次線形微分方程式

北海道文教大学附属高等学校（非常勤）

杉本　幸司

§1. はじめに

[3]において，隣接 3 項間の漸化式を取り上げ，線形代数の視点で探っている。隣接 3 項間の漸化式を離散版としたら，その連続版である 2 階同次線形微分方程式についても同じような理論が成り立つのではないかと考えることは自然である。

そこで，本稿では 2 階同次線形微分方程式について，線形代数の視点で考察する。

§2. 問題とする微分方程式

本稿では，2 階同次線形微分方程式

$$y'' + py' + qy = 0 \qquad \cdots (\bigstar)$$

について考える。ここで，p, qは実数の定数である。

ここでは，線形代数の視点で考察してみよう。考え方は[3]の一部を変更するだけで並行してできる。

ここでも微分方程式（★）に対して 2 次方程式

$$t^2 + pt + q = 0 \qquad \cdots \ ①$$

を考え，特性方程式と呼ぶことにしよう。

§3. 主要公式

2 階同次線形微分方程式（★）の解法として次の公式を証明することを目的とする。

公式 1（実固有値が 2 個の場合）特性方程式①が異なる 2 つの実数解$\lambda, \mu (\lambda \neq \mu)$をもつとする。

このとき微分方程式（★）の解 $y = f(x)$ は

$$y = \alpha e^{\lambda x} + \beta e^{\mu x}$$

と表され，定数α, βは

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{1}{\mu - \lambda} \begin{pmatrix} \mu & -1 \\ -\lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(0) \\ f'(0) \end{pmatrix}$$

で与えられる。

公式 2（実固有値が 1 個の場合）特性方程式①が重解λをもつとする。

このとき微分方程式（★）の解 $y = f(x)$ は

$$y = (\alpha + \beta x) e^{\lambda x}$$

と表され，定数α, βは

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(0) \\ f'(0) \end{pmatrix}$$

で与えられる。

公式 3（実固有値をもたない場合）特性方程式①が共役な 2 つの虚数解$a \pm bi$（a, bは実数，$b \neq 0$）をもつとする。

このとき微分方程式（★）の解 $y = f(x)$ は

$$y = e^{ax}(\alpha \cos bx + \beta \sin bx)$$

と表され，定数α, βは

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{1}{b} \begin{pmatrix} b & 0 \\ -a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(0) \\ f'(0) \end{pmatrix}$$

で与えられる。

公式の証明の前に例題をこの公式を用いて解いてみよう。

【例題 1】微分方程式 $y''-4y'-5y=0$ の解 $y=f(x)$ で，$f(0)=3, f'(0)=9$となるものを求めよ。

［解］特性方程式①の解は$t=-1,5$であるからこの微分方程式の解$y=f(x)$は

$$y=\alpha e^{-x}+\beta e^{5x}$$

と表され，定数α,βは

$$\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}=\frac{1}{5-(-1)}\begin{pmatrix}5 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ 9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$$

ゆえに $y=e^{-x}+2e^{5x}$

【例題 2】微分方程式 $y''+6y'+9y=0$ の解 $y=f(x)$ で，$f(0)=1, f'(0)=5$となるものを求めよ。

［解］特性方程式①の解は$t=-3$であるからこの微分方程式の解$y=f(x)$は

$$y=(\alpha+\beta x)e^{-3x}$$

と表され，定数α,βは

$$\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 8\end{pmatrix}$$

ゆえに$y=(1+8x)e^{-3x}$

【例題 3】微分方程式 $y''-2y'+4y=0$ の解 $y=f(x)$ で，$f(0)=1, f'(0)=4$となるものを求めよ。

［解］特性方程式①の解は$t=a\pm bi$（$a=1, b=\sqrt{3}$）であるからこの微分方程式の解$y=f(x)$は

$$y=e^{x}(\alpha\cos\sqrt{3}x+\beta\sin\sqrt{3}x)$$

と表され，定数α,βは

$$\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}\sqrt{3} & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{3}\end{pmatrix}$$

ゆえに$y=e^{x}(\cos\sqrt{3}x+\sqrt{3}\sin\sqrt{3}x)$

§4. 公式を証明するための準備

公式 1〜3 の証明にとりかかる。この節では準備として全体を通した一般論を述べる。

線形代数の視点から考察するので以下の議論の展開には線形代数の知識を必要とする。

話を簡単にするために，以下では，関数といえば実数全体で定義された無限回微分可能な実数値関数のことを表す。

Vを関数全体の集合とする。

$$V=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}|f\text{は関数}\}$$

Vの元f,gと実数kに対して$f+g, kf$を

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$$

$$(kf)(x)=kf(x)$$

で定義する。

補題 1　Vはこの和と実数倍で実ベクトル空間になる。

［証明］容易に確認できる。■

Vの部分集合Wを

$$W=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}|f''+pf'+qf=0\}$$

で定義する。すなわちWは微分方程式（★）の解となる関数全体の集合である。

補題 2　WはVの部分空間になる。

［証明］f,gをWの元，kを実数とする。このとき

$$f''+pf'+qf=0 \qquad \cdots ②$$

$$g''+pg+qg=0 \qquad \cdots ③$$

②＋③より

$$(f+g)''+p(f+g)'+q(f+g)=0$$

であるから，$f+g$はWの元である。

k×②より

$$(kf)'' + p(kf)' + q(kf) = 0$$

であるから，kfはWの元である。

よって，WはVの部分空間になる。■

Wの元e_1, e_2を

$$e_1(0) = 1, e_1'(0) = 0$$

$$e_2(0) = 0, e_2'(0) = 1$$

をみたすものと定義する。すなわちe_1, e_2はこれらの初期条件をみたす微分方程式（★）の解である。

補題 3　$\{e_1, e_2\}$はWの基底になる。

［証明］微分方程式の理論によれば，a, bを任意の実数とするとき，$f(0) = a, f'(0) = b$をみたす微分方程式（★）の解，すなわちWの元fがただ一つ存在する。このfは

$$f(x) = ae_1(x) + be_2(x)$$

と$\{e_1, e_2\}$を用いて表され，$\{e_1, e_2\}$のいずれか一方のみでは表せないことからわかる。■

Wの元fに対して

$$D(f) = f'$$

と定義すると$D(f)$はWの元である。実際，$D(f) = g$とすると

$$g'' + pg' + qg = (f'' + pf' + qf)' = 0$$

だからである。これより変換$D: W \to W$が得られる。

補題 4　変換$D: W \to W$は線形変換である。

［証明］f, gをWの元，kを実数とする。このとき

$$D(f + g) = (f + g)' = f' + g' = D(f) + D(g)$$

$$D(kf) = (kf)' = kf' = kD(f)$$

であるから変換$D: W \to W$は線形変換である。■

補題 5　線形変換$D: W \to W$の基底$\{e_1, e_2\}$の下での表現の行列Aは

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q & -p \end{pmatrix}$$

である。

［証明］$D(e_i) = f_i$とおくと，$e_i'' + pe_i' + qe_i = 0$であるから

$$f_i = e_i'$$

$$f_i' = e_i'' = -pe_i' - qe_i$$

である（i=1,2)。よって

$$f_1(0) = e_1'(0) = 0$$

$$f_1'(0) = -pe_1'(0) - qe_1(0) = -q$$

$$f_2(0) = e_2'(0) = 1$$

$$f_2'(0) = -pe_2'(0) - qe_2(0) = -p$$

となるがこれは

$$D(e_1) = -qe_2$$

$$D(e_2) = e_1 - pe_2$$

を意味する。したがって

$$(D(e_1), D(e_2)) = (-qe_2, e_1 - pe_2)$$

$$= (e_1, e_2)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q & -p \end{pmatrix}$$

より求める表現の行列は$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q & -p \end{pmatrix}$である。■

補題 6　線形変換$D: W \to W$に実固有値λが存在するとき，関数u，ただし

$$u(x) = e^{\lambda x}$$

は固有値λに属するDの固有ベクトルである。

［証明］固有値λに属するDの固有ベクトルをuとすると，$D(u) = \lambda u$より

$$\frac{du}{dx} = \lambda u$$

である。これは変数分離形の微分方程式である。与式を変形して

$$\frac{du}{u} = \lambda dx \quad \text{よって} \quad \int \frac{du}{u} = \int \lambda dx$$

ゆえに　$\log|u| = \lambda x + C$（Cは任意定数）

したがって　$u = \pm e^C e^{\lambda x}$

$A = \pm e^C$とおくと

$$u = Ae^{\lambda x}$$

である。

$A = 1$として，$u(x) = e^{\lambda x}$である。■

補題 7　線形変換$D: W \to W$の実固有値λは，特性方程式①の実数解である。

［証明］補題 5 の行列Aについて調べればよい。Eを単位行列として

$$|tE - A| = \begin{vmatrix} t & -1 \\ q & t+p \end{vmatrix} = t(t+p) + q$$

$$= t^2 + pt + q$$

であるので固有値は特性方程式①の解である。■

写像$\phi: W \to \mathbb{R}^2$を，Wの元fに対して

$$\phi(f) = \begin{pmatrix} f(0) \\ f'(0) \end{pmatrix}$$

で定義する。

補題 8　写像$\phi: W \to \mathbb{R}^2$はWから$\mathbb{R}^2$への同形写像である。

したがって，ϕを通してWは$\mathbb{R}^2$と同一視できる。

［証明］（線形写像であること）f, gをWの元，kを実数とする。このとき

$$\phi(f+g) = \begin{pmatrix} f(0)+g(0) \\ f'(0)+g'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(0) \\ f'(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g(0) \\ g'(0) \end{pmatrix}$$

$$= \phi(f) + \phi(g)$$

$$\phi(kf) = \begin{pmatrix} kf(0) \\ kf'(0) \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} f(0) \\ f'(0) \end{pmatrix} = k\phi(f)$$

であるからϕは線形写像である。

（全射であること）$\mathbb{R}^2$の任意のベクトル$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$に対して，$f$を微分方程式

$$f(0) = p, f'(0) = q, f'' + pf' + qf = 0$$

の解とする。このとき明らかにfはWの元で，$\phi(f) = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$であるから$\phi$は全射である。

（単射であること）f, gをWの元で，$\phi(f) \neq \phi(g)$とする。このとき$\begin{pmatrix} f(0) \\ f'(0) \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} g(0) \\ g'(0) \end{pmatrix}$であるから$f \neq g$となり，$\phi$は単射である。■

補題 9　$y = f(x)$を微分方程式（★）の解とする。

(1) Wの任意の基底$\{u, v\}$に対して

$$f = \alpha u + \beta v$$

となる実数の定数α, βがただ一つ存在する。

(2) Wの基底$\{e_1, e_2\}$から基底$\{u, v\}$への基底変換の行列をPとすると，定数α, βは

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} f(0) \\ f'(0) \end{pmatrix}$$

で与えられる。

［証明］(1)fがWの元だから明らか。

(2) 写像$\phi: W \to \mathbb{R}^2$を通してWを$\mathbb{R}^2$と同一視する。このとき

$$f = \begin{pmatrix} f(0) \\ f'(0) \end{pmatrix}, e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

である。(1)と$(u, v) = (e_1, e_2)P$であることより

$$\begin{pmatrix} f(0) \\ f'(0) \end{pmatrix} = \alpha u + \beta v = (u, v)\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = (e_1, e_2)P\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

である。Pは正則であるから

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} f(0) \\ f'(0) \end{pmatrix}$$

となる。■

これで公式を証明するための準備ができた。以下では，公式ごとに節を改めて順次証明していく。

§5. 実固有値が 2 個の場合

この節では線形変換$D: W \to W$が異なる 2 つの実固有値をもつ場合を考える。

Dの異なる 2 つの実固有値を$\lambda, \mu (\lambda \neq \mu)$とする。

補題 10　関数u, vを

$$u(x) = e^{\lambda x}, v(x) = e^{\mu x}$$

とすれば，$\{u, v\}$はWの基底になる。

特に，$u(0) = 1, u'(0) = \lambda, v(0) = 1, v'(0) = \mu$である。

［証明］固有値λ, μに属するDの固有ベクトルで，任意定数が 1 のものをそれぞれu, vとする。補題 6 より

$$u(x) = e^{\lambda x}, v(x) = e^{\mu x}$$

である。

このとき$\{u, v\}$はWの基底になる。■

補題 11　Wの基底$\{e_1, e_2\}$から補題 10 の基底$\{u, v\}$への基底変換の行列Pは

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda & \mu \end{pmatrix}$$

である。

［証明］写像$\phi: W \to \mathbb{R}^2$を通してWを$\mathbb{R}^2$と同一視すれば

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 \\ \mu \end{pmatrix}, e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

として

$$(u, v) = (e_1, e_2)P$$

となる行列Pを求めればよいが

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda & \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P$$

となるから，$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda & \mu \end{pmatrix}$である。■

以上の準備の下，公式 1 が証明できる。

［公式 1 の証明］微分方程式（★）の解を$y = f(x)$とする。$\{u, v\}$を補題 10 におけるWの基底とする。

補題 9(1)より

$$f(x) = \alpha e^{\lambda x} + \beta e^{\mu x}$$

である。

補題 9(2)，補題 11 より

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} f(0) \\ f'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda & \mu \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} f(0) \\ f'(0) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\mu - \lambda}\begin{pmatrix} \mu & -1 \\ -\lambda & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f(0) \\ f'(0) \end{pmatrix}$$

となる。■

§6. 実固有値が 1 個の場合

この節では線形変換$D: W \to W$が 1 つの実固有値をもつ場合を考える。

Dの実固有値をλとする。$\lambda = 0$とすると，補題 7 より特性方程式が$t^2 = 0$，すなわち$p = q = 0$である。よ

って微分方程式（★）は$y''=0$なるつまらないものになるから$\lambda\neq 0$とする。

補題 12　関数u,vを

$$u(x)=e^{\lambda x},v(x)=xe^{\lambda x}$$

とすれば，$\{u,v\}$はWの基底になる。

特に，$u(0)=1,u'(0)=\lambda,v(0)=0,v'(0)=1$である。

［証明］固有値λに属するDの固有ベクトルで，任意定数が 1 のものをuとする。補題 6 より

$$u(x)=e^{\lambda x}$$

である。

Dの基底$\{e_1,e_2\}$の下での表現の行列Aは，補題 5 より

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -q & -p\end{pmatrix}$$

である。$\lambda E-A$ （E は単位行列）を基本変形すると

$$\lambda E-A=\begin{pmatrix}\lambda & -1\\ q & \lambda+p\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}\lambda & -1\\ 0 & \lambda+p+\frac{q}{\lambda}\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\lambda & -1\\ 0 & \frac{\lambda^2+p\lambda+q}{\lambda}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

となる。Aの固有値λの固有空間の次元は 1 だが，固有値λの重複度は 2 だからAは対角化可能ではない。

よって，Aのジョルダン標準形は$\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$である。したがって

$$D(v)=\lambda v+u$$

となるvがある。このとき

$$\frac{dv}{dx}-\lambda v=e^{\lambda x}$$

である。この微分方程式の一般解は，その特殊解$xe^{\lambda x}$と$\frac{dv}{dx}-\lambda v=0$の一般解$Ae^{\lambda x}$（$A$ は任意定数）の和

$$v(x)=xe^{\lambda x}+Ae^{\lambda x}$$

で与えられる。

$A=0$として

$$v(x)=xe^{\lambda x}$$

である。

このとき$\{u,v\}$はWの基底になる。■

補題 13　Wの基底$\{e_1,e_2\}$から補題 12 の基底$\{u,v\}$への基底変換の行列Pは

$$P=\begin{pmatrix}1 & 0\\ \lambda & 1\end{pmatrix}$$

である。

［証明］写像$\phi:W\to\mathbb{R}^2$を通してWを$\mathbb{R}^2$と同一視すれば

$$u=\begin{pmatrix}1\\ \lambda\end{pmatrix},v=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix},e_1=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix},e_2=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$$

として

$$(u,v)=(e_1,e_2)P$$

となる行列Pを求めればよいが

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ \lambda & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}P$$

となるから，$P=\begin{pmatrix}1 & 0\\ \lambda & 1\end{pmatrix}$である。■

以上の準備の下，公式 2 が証明できる。

［公式 2 の証明］微分方程式（★）の解を$y=f(x)$とする。$\{u,v\}$を補題 12 におけるWの基底とする。

補題 9(1)より

$$f(x)=(\alpha+\beta x)e^{\lambda x}$$

である。

補題 9(2)，補題 13 より

$$\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix}f(0)\\ f'(0)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ \lambda & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}f(0)\\ f'(0)\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1 & 0\\ -\lambda & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f(0)\\ f'(0)\end{pmatrix}$$

となる。

公式 2 は$\lambda = 0$のときも成り立つ。■

§7. 実固有値をもたない場合

この節では線形変換$D: W \to W$が実固有値をもたない場合を考える。

今の場合，Dは共役な 2 つの虚数の固有値をもつ。それらを$a \pm bi$（a, bは実数，$b \neq 0$）とする。

次の補題 14 の証明では今まで実数の範囲で考察してきた事項を複素数まで広げて考える。補題 6 は複素数の場合でも成り立つ。

補題 14　関数u, vを

$$u(x) = e^{ax}\cos bx\,, v(x) = e^{ax}\sin bx$$

とすれば，$\{u, v\}$はWの基底になる。

特に，$u(0) = 1, u'(0) = a, v(0) = 0, v'(0) = b$である。

［証明］複素数まで範囲を広げることによって，固有値$a \pm bi$に属するDの固有ベクトルで，任意定数が 1 のものをそれぞれu^+, u^-とする。補題 6 より

$$u^+(x) = e^{(a+bi)x}, u^-(x) = e^{(a-bi)x}$$

である。このu^+, u^-を使って$\{u, v\}$を

$$u = \frac{1}{2}(u^+ + u^-), v = \frac{1}{2i}(u^+ - u^-)$$

で定義する。すなわち

$$u(x) = e^{a}\cos bx\,, v(x) = e^{ax}\sin bx$$

である。

このとき$\{u, v\}$はWの基底になる。■

補題 15　Wの基底$\{e_1, e_2\}$から補題 14 の基底$\{u, v\}$への基底変換の行列Pは

$$P = \begin{pmatrix}1 & 0\\ a & b\end{pmatrix}$$

である。

［証明］写像$\phi: W \to \mathbb{R}^2$を通してWを$\mathbb{R}^2$と同一視すれば

$$u = \begin{pmatrix}1\\ a\end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix}0\\ b\end{pmatrix}, e_1 = \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$$

として

$$(u, v) = (e_1, e_2)P$$

となる行列Pを求めればよいが

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ a & b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}P$$

となるから，$P = \begin{pmatrix}1 & 0\\ a & b\end{pmatrix}$である。■

以上の準備の下，公式 3 が証明できる。

［公式 3 の証明］微分方程式（★）の解を$y = f(x)$とする。$\{u, v\}$を補題 14 におけるWの基底とする。

補題 9(1)より

$$f(x) = e^{ax}(\alpha\cos bx + \beta\sin bx)$$

である。

補題 9(2)，補題 15 より

$$\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix}f(0)\\ f'(0)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ a & b\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}f(0)\\ f'(0)\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{b}\begin{pmatrix}b & 0\\ -a & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f(0)\\ f'(0)\end{pmatrix}$$

となる。■

§8. 3階同次線形微分方程式へ

いままで述べてきた手法を，3階同次線形微分方程式の問題に応用してみよう。

【例題4】微分方程式 $y''' - 3y'' + 4y = 0$ の解 $y = f(x)$ で，$f(0) = f'(0) = 1, f''(0) = 9$となるものを求めよ。

［解］Wを

$$W = \{f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} | f''' - 3f'' + 4f = 0\}$$

で定義する。Wは3次元実ベクトル空間になる。さらにWの元e_1, e_2, e_3を

$$e_1(0) = 1, {e_1}'(0) = 0, {e_1}''(0) = 0$$

$$e_2(0) = 0, {e_2}'(0) = 1, {e_2}''(0) = 0$$

$$e_3(0) = 0, {e_3}'(0) = 0, {e_3}''(0) = 1$$

となるものとすると，$\{e_1, e_2, e_3\}$はWの基底になる。

Wの元fに対して

$$D(f) = f'$$

と定義すると$D: W \to W$は線形変換になる。

$D(e_i) = f_i$とおくと，${e_i}''' - 3{e_i}'' + 4e_i = 0$であるから

$$f_i = {e_i}'$$

$${f_i}' = {e_i}''$$

$${f_i}'' = {e_i}''' = 3{e_i}'' - 4e_i$$

である（i=1,2,3）。よって

$$f_1(0) = {e_1}'(0) = 0$$

$${f_1}'(0) = {e_1}''(0) = 0$$

$${f_1}''(0) = 3{e_1}''(0) - 4e_1(0) = -4$$

$$f_2(0) = {e_2}'(0) = 1$$

$${f_2}'(0) = {e_2}''(0) = 0$$

$${f_2}''(0) = 3{e_2}''(0) - 4e_2(0) = 0$$

$$f_3(0) = {e_3}'(0) = 0$$

$${f_3}'(0) = {e_3}''(0) = 1$$

$${f_3}''(0) = 3{e_3}''(0) - 4e_3(0) = 3$$

となるがこれは

$$D(e_1) = -4e_3$$

$$D(e_2) = e_1$$

$$D(e_3) = e_2 + 3e_3$$

を意味する。したがって，Dの基底$\{e_1, e_2, e_3\}$の下での表現の行列Aは

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

である。Dの固有値はAの固有値と一致し

$$|tE - A| = \begin{vmatrix} t & -1 & 0 \\ 0 & t & -1 \\ 4 & 0 & t-3 \end{vmatrix} = t\begin{vmatrix} t & -1 \\ 0 & t-3 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ t & -1 \end{vmatrix}$$

$$= t(t^2 - 3t) + 4 = t^3 - 3t^2 + 4$$

$$= (t+1)(t-2)^2$$

より固有値は$-1,2$である（Eは単位行列）。

補題6と同様にして，固有値$-1,2$に属するDの固有ベクトルとしてそれぞれu, v，ただし

$$u(x) = e^{-x}, v(x) = e^{2x}$$

をとる。$2E - A$を基本変形すると

$$2E - A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる。Aの固有値2の固有空間の次元は1だが，固有値2の重複度は2だからAは対角化可能ではない。よって，Aのジョルダン標準形は$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$である。したがって

$$D(w) = 2w + v$$

となるwがある。

$$\frac{dw}{dx} - 2w = e^{2x}$$

である。この微分方程式の一般解は，その特殊解xe^{2x}と$\frac{dw}{dx} - 2w = 0$の一般解Ae^{2x}（A は任意定数）の和

$$w(x) = xe^{2x} + Ae^{2x}$$

で与えられる。$A = 0$として

$$w(x) = xe^{2x}$$

とする。このとき$\{u, v, w\}$はWの基底になり

$$f = \alpha u + \beta v + \gamma w$$

となる実数α, β, γが存在する。これより

$$f(x) = \alpha e^{-x} + (\beta + \gamma x)e^{2x}$$

である。

写像$\phi: W \to \mathbb{R}^3$を，Wの元fに対して

$$\phi(f) = \begin{pmatrix} f(0) \\ f'(0) \\ f''(0) \end{pmatrix}$$

で定義する。このとき写像$\phi: W \to \mathbb{R}^3$はWから$\mathbb{R}^3$への同形写像で，このϕを通してWは$\mathbb{R}^3$と同一視できる。

基底$\{e_1, e_2, e_3\}$から基底$\{u, v, w\}$への基底変換の行列Pは，$(u, v, w) = (e_1, e_2, e_3)P$と

$$u(0) = 1, u'(0) = -1, u''(0) = 1$$

$$v(0) = 1, v'(0) = 2, v''(0) = 4$$

$$w(0) = 0, w'(0) = 1, w''(0) = 4$$

より

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

である。よって，実数α, β, γは補題 9(2)と同様にして

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} f(0) \\ f'(0) \\ f''(0) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & -4 & 1 \\ 5 & 4 & -1 \\ -6 & -3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

と求められる。以上より

$$f(x) = 1 \times e^{-x} + (0 + 2x)e^{2x}$$

$$= e^{-x} + 2xe^{2x}$$

§9. おわりに

線形代数の視点に立って，2 階同次微分方程式について隣接 3 項間の漸化式と並行して考察し，実際に同じような結果を得た。これを通して，線形代数の汎用性とその威力の一端を感じ取ることができた。

≪参考文献≫

[1] 斎藤正彦：『線型代数入門』，東京大学出版会，1966.

[2] 白岩謙一：『常微分方程式論序説』，サイエンス社，1975.

[3] 杉本幸司：「線形代数の視点から見た隣接 3 項間の漸化式」，to be submitted.

（2026 年 10 月 30 日）