線形代数の視点から見た隣接３項間の漸化式

北海道文教大学附属高等学校（非常勤）

杉本　幸司

§1. はじめに

高校数学を一歩高い見地から眺めると意外な発見をすることがある。本稿では，数学 B の数列で扱われている漸化式の中で，受験数学などで発展として取り上げられている隣接３項間の漸化式の問題について，線形代数の視点で探ってみる。

§2. 問題とする漸化式

本稿では，隣接３項間の漸化式

$$a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0 \quad \cdots(\bigstar)$$

について考える。ここで，p,qは実数の定数である。

手始めに受験数学でよく知られている解法を確認しておこう。受験参考書では漸化式（★）で定められる数列$\{a_n\}$の一般項を求めるのに，特性方程式と呼ばれる２次方程式

$$t^2+pt+q=0 \quad \cdots ①$$

を解き，その２つの実数解をα,βとすると

(i) $\alpha\neq\beta$のとき

$$a_{n+2}-\beta a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\beta a_n)$$

$$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)$$

と変形する。

(ii) $\alpha=\beta$のとき

$$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\alpha a_n)$$

と変形する。

などと記述されている。

具体的な問題を見てみよう。

【例題 1】$a_1=3,a_2=9,a_{n+2}-4a_{n+1}-5a_n=0$で定められる数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

［解］（特性方程式$t^2-4t-5=0$の解は$t=-1,5$であるから）漸化式は

$$a_{n+2}-5a_{n+1}=-(a_{n+1}-5a_n)$$

$$a_{n+2}+a_{n+1}=5(a_{n+1}+a_n)$$

と変形される。このとき$\{a_{n+1}-5a_n\},\{a_{n+1}+a_n\}$は等比数列である。

$$a_{n+1}-5a_n=(a_2-5a_1)\times(-1)^{n-1}$$

$$=(9-5\times3)\times(-1)^{n-1}$$

$$=-6\times(-1)^{n-1}$$

$$a_{n+1}+a_n=(a_2+a_1)\times5^{n-1}$$

$$=(9+3)\times5^{n-1}$$

$$=12\times5^{n-1}$$

差をとると

$$-6a_n=-6\times(-1)^{n-1}-12\times5^{n-1}$$

ゆえに $a_n=(-1)^{n-1}+2\cdot5^{n-1}$

【例題 2】$a_1=1, a_2=5, a_{n+2}+6a_{n+1}+9a_n=0$で定められる数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

［解］（特性方程式$t^2+6t+9=0$の解は$t=-3$であるから）漸化式は

$$a_{n+2}+3a_{n+1}=-3(a_{n+1}+3a_n)$$

と変形される。このとき$\{a_{n+1}+3a_n\}$は等比数列である。

$$\begin{aligned}a_{n+1}+3a_n&=(a_2+3a_1)\times(-3)^{n-1}\\&=(5+3\times1)\times(-3)^{n-1}\\&=8\times(-3)^{n-1}\end{aligned}$$

両辺を$(-3)^{n+1}$で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{(-3)^{n+1}}-\frac{a_n}{(-3)^n}=\frac{8}{9}$$

したがって，$\left\{\frac{a_n}{(-3)^n}\right\}$は初項$-\frac{1}{3}$，公差$\frac{8}{9}$の等差数列であるから

$$\frac{a_n}{(-3)^n}=-\frac{1}{3}+(n-1)\times\frac{8}{9}=\frac{1}{9}(8n-11)$$

ゆえに $a_n=(8n-11)(-3)^{n-2}$

このように受験数学のテクニックを使って鮮やかに解くことができる。しかし，受験参考書（たとえば[1]）を見ても特性方程式が虚数解をもつ場合について述べられている箇所は見当たらない。したがって，

【例題 3】$a_1=1, a_2=4, a_{n+2}-2a_{n+1}+4a_n=0$で定められる数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

という問題について，特性方程式$t^2-2t+4=0$の解は$t=1\pm\sqrt{3}i$であるから，前のようには解くことができない。

本稿では線形代数の視点で隣接 3 項間の漸化式を考察する。ただし，理論が専門的で，証明は計算量が少なくないので実用的であるかどうかはわからない。

§3. 主要公式

隣接 3 項間の漸化式（★）の解法として次の公式を証明することを目的とする。

公式 1（実固有値が 2 個の場合）特性方程式①が異なる 2 つの実数解$\lambda,\mu(\lambda\neq\mu)$をもつとする。

このとき漸化式（★）で定められる数列$\{a_n\}$の一般項は

$$a_n=\alpha\lambda^{n-1}+\beta\mu^{n-1}$$

と表され，定数α,βは

$$\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}=\frac{1}{\mu-\lambda}\begin{pmatrix}\mu&-1\\-\lambda&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$$

で与えられる。

公式 2（実固有値が 1 個の場合）特性方程式①が重解λをもつとする。

このとき漸化式（★）で定められる数列$\{a_n\}$の一般項は

$$a_n=\alpha\lambda^{n-1}+\beta(n-1)\lambda^{n-2}$$

と表され，定数α,βは

$$\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\-\lambda&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$$

で与えられる。

公式 3（実固有値をもたない場合）特性方程式①が共役な 2 つの虚数解$\lambda,\bar{\lambda}=a\pm bi$（$a,b$は実数，$b\neq0$）をもつとする。

このとき漸化式（★）で定められる数列$\{a_n\}$の一般項は

$$a_n=\alpha\frac{\lambda^{n-1}+\bar{\lambda}^{n-1}}{2}+\beta\frac{\lambda^{n-1}-\bar{\lambda}^{n-1}}{2i}$$

と表され，定数α,βは

$$\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}=\frac{1}{b}\begin{pmatrix}b&0\\-a&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$$

で与えられる。

公式の証明の前に先ほどの例題 1〜3 をこの公式を用いて解いてみよう。

［例題 1 の公式 1 による解］特性方程式①の解は $t=-1,5$であるからこの漸化式で定められる数列$\{a_n\}$の一般項は

$$a_n=\alpha(-1)^{n-1}+\beta 5^{n-1}$$

と表され，定数α,βは

$$\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}=\frac{1}{5-(-1)}\begin{pmatrix}5 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ 9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$$

ゆえに $a_n=(-1)^{n-1}+2\cdot 5^{n-1}$

［例題 2 の公式 2 による解］特性方程式①の解は $t=-3$であるからこの漸化式で定められる数列$\{a_n\}$の一般項は

$$a_n=\alpha(-3)^{n-1}+\beta(n-1)(-3)^{n-2}$$

と表され，定数α,βは

$$\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 8\end{pmatrix}$$

ゆえに $a_n=(-3)^{n-1}+8(n-1)(-3)^{n-2}$

$$=(8n-11)(-3)^{n-2}$$

［例題 3 の公式 3 による解］特性方程式①の解は $t=a\pm bi$（$a=1,b=\sqrt{3}$）である。$\lambda=1+\sqrt{3}i$とすると

$$\lambda=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

であるから

$$\lambda^{n-1}=2^{n-1}\left\{\cos\frac{(n-1)\pi}{3}+i\sin\frac{(n-1)\pi}{3}\right\}$$

$$\bar{\lambda}^{n-1}=2^{n-1}\left\{\cos\frac{(n-1)\pi}{3}-i\sin\frac{(n-1)\pi}{3}\right\}$$

$$\frac{\lambda^{n-1}+\bar{\lambda}^{n-1}}{2}=2^{n-1}\cos\frac{(n-1)\pi}{3}$$

$$\frac{\lambda^{n-1}-\bar{\lambda}^{n-1}}{2i}=2^{n-1}\sin\frac{(n-1)\pi}{3}$$

したがって，この漸化式で定められる数列$\{a_n\}$の一般項は

$$a_n=2^{n-1}\left\{\alpha\cos\frac{(n-1)\pi}{3}+\beta\sin\frac{(n-1)\pi}{3}\right\}$$

と表され，定数α,βは

$$\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}\sqrt{3} & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{3}\end{pmatrix}$$

ゆえに $a_n=2^{n-1}\left\{\cos\frac{(n-1)\pi}{3}+\sqrt{3}\sin\frac{(n-1)\pi}{3}\right\}$

§4. 公式を証明するための準備

公式 1〜3 の証明にとりかかる。この節では準備として全体を通した一般論を述べる。

線形代数の視点から考察するので以下の議論の展開には線形代数の知識を必要とする。

以下では数列$\{a_n\}$を$a=(a_1,a_2,a_3,\cdots)$のように表す。

Vを実数の数列全体の集合とする。

$$V=\{a=(a_1,a_2,a_3,\cdots)|a_n\text{は実数}(n\geqq 1)\}$$

Vの元$a=(a_1,a_2,a_3,\cdots),b=(b_1,b_2,b_3,\cdots)$と実数$k$に対して$a+b,ka$を

$$a+b=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3,\cdots)$$

$$ka=(ka_1,ka_2,ka_3,\cdots)$$

で定義する。

補題 1　Vはこの和と実数倍で実ベクトル空間になる。

［証明］容易に確認できる。■

Vの部分集合Wを

$$W=\{a=(a_1,a_2,a_3,\cdots)|a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0\}$$

で定義する。すなわちWは漸化式（★）で定められる数列全体の集合である。

補題 2　WはVの部分空間になる。

［証明］$a=(a_1,a_2,a_3,\cdots),b=(b_1,b_2,b_3,\cdots)$を$W$の元，$k$を実数とする。このとき

$$a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0 \quad \cdots \quad ②$$

$$b_{n+2}+pb_{n+1}+qb_n=0 \quad \cdots \quad ③$$

②＋③より

$$(a_{n+2}+b_{n+2})+p(a_{n+1}+b_{n+1})+q(a_n+b_n)=0$$

であるから，$a+b$はWの元である。

k×②より

$$(ka_{n+2})+p(ka_{n+1})+q(ka_n)=0$$

であるから，kaはWの元である。

よって，WはVの部分空間になる。■

Wの元e_1,e_2を

$$e_1=(1,0,-q,\cdots),e_2=(0,1,-p,\cdots)$$

で定義する。すなわちe_1は初項が1，第 2 項が0で，漸化式（★）で定められる数列，e_2は初項が0，第 2 項が1で，漸化式（★）で定められる数列である。

補題 3　$\{e_1,e_2\}$はWの基底になる。

［証明］Wの任意の元$a=(a_1,a_2,a_3,\cdots)$は

$$a=a_1e_1+a_2e_2$$

と$\{e_1,e_2\}$を用いて表され，$\{e_1,e_2\}$のいずれか一方のみでは表せないことからわかる。■

Wの元$a=(a_1,a_2,a_3,\cdots)$に対して

$$\sigma(a)=(a_2,a_3,a_4,\cdots)$$

と定義すると$\sigma(a)$はWの元である。実際，$\sigma(a)=(b_1,b_2,b_3,\cdots)$とすると

$$b_{n+2}+pb_{n+1}+qb_n=a_{n+3}+pa_{n+2}+qa_{n+1}=0$$

だからである。これより変換$\sigma:W\to W$が得られる。

補題 4　変換$\sigma:W\to W$は線形変換である。

［証明］$a=(a_1,a_2,a_3,\cdots),b=(b_1,b_2,b_3,\cdots)$を$W$の元，$k$を実数とする。このとき

$$\begin{aligned}\sigma(a+b)&=\sigma(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3,\cdots)\\&=(a_2+b_2,a_3+b_3,a_4+b_4,\cdots)\\&=(a_2,a_3,a_4,\cdots)+(b_2,b_3,b_4,\cdots)\\&=\sigma(a)+\sigma(b)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma(ka)&=\sigma(ka_1,ka_2,ka_3,\cdots)\\&=(ka_2,ka_3,ka_4,\cdots)\\&=k(a_2,a_3,a_4,\cdots)\\&=k\sigma(a)\end{aligned}$$

であるから変換$\sigma:W\to W$は線形変換である。■

補題 5　線形変換$\sigma:W\to W$の基底$\{e_1,e_2\}$の下での表現の行列Aは

$$A=\begin{pmatrix}0&1\\-q&-p\end{pmatrix}$$

である。

［証明］$e_1=(1,0,-q,\cdots),e_2=(0,1,-p,\cdots)$であるから

$$\sigma(e_1)=(0,-q,\cdots)=-qe_2$$

$$\sigma(e_2)=(1,-p,\cdots)=e_1-pe_2$$

である。したがって

$$\begin{aligned}(\sigma(e_1),\sigma(e_2))&=(-qe_2,e_1-pe_2)\\&=(e_1,e_2)\begin{pmatrix}0&1\\-q&-p\end{pmatrix}\end{aligned}$$

より求める表現の行列は$A=\begin{pmatrix}0&1\\-q&-p\end{pmatrix}$である。■

補題 6　線形変換$\sigma: W \to W$に実固有値λが存在するとき，数列$u = (u_1, u_2, u_3, \cdots)$，ただし

$$u_n = \lambda^{n-1}$$

（すなわち$u = (1, \lambda, \lambda^2, \cdots)$）は固有値$\lambda$に属する$\sigma$の固有ベクトルである。

［証明］固有値λに属するσの固有ベクトルを

$u = (u_1, u_2, u_3, \cdots)$とすると，$\sigma(u) = \lambda u$より

$$(u_2, u_3, u_4, \cdots) = (\lambda u_1, \lambda u_2, \lambda u_3, \cdots)$$

であるから

$$u_2 = \lambda u_1, u_3 = \lambda u_2, u_4 = \lambda u_3, \cdots$$

すなわち$u_n = \lambda^{n-1} u_1$である。

$u_1 = 1$として，$u_n = \lambda^{n-1}$である。■

補題 7　線形変換$\sigma: W \to W$の実固有値λは，特性方程式①の実数解である。

［証明］補題 5 の行列Aについて調べればよい。Eを単位行列として

$$|tE - A| = \begin{vmatrix} t & -1 \\ q & t+p \end{vmatrix} = t(t+p) + q$$

$$= t^2 + pt + q$$

であるので固有値は特性方程式①の解である。■

写像$\phi: W \to \mathbb{R}^2$を，Wの元$a = (a_1, a_2, a_3, \cdots)$に対して

$$\phi(a) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

で定義する。

補題 8　写像$\phi: W \to \mathbb{R}^2$はWから$\mathbb{R}^2$への同形写像である。

したがって，ϕを通してWは$\mathbb{R}^2$と同一視できる。

［証明］（線形写像であること）$a = (a_1, a_2, a_3, \cdots)$，$b = (b_1, b_2, b_3, \cdots)$を$W$の元，$k$を実数とする。このとき

$$\phi(a+b) = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \phi(a) + \phi(b)$$

$$\phi(ka) = \begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = k\phi(a)$$

であるからϕは線形写像である。

（全射であること）$\mathbb{R}^2$の任意のベクトル$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$に対して，$a = (a_1, a_2, a_3, \cdots)$を漸化式

$$a_1 = p, a_2 = q, a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$$

で定められる数列とする。このとき明らかにaはWの元で，$\phi(a) = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$であるから$\phi$は全射である。

（単射であること）$a = (a_1, a_2, a_3, \cdots)$，$b = (b_1, b_2, b_3, \cdots)$を$W$の元で，$\phi(a) \neq \phi(b)$とする。このとき$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$であるから$a \neq b$となり，$\phi$は単射である。■

補題 9　$a = (a_1, a_2, a_3, \cdots)$を漸化式（★）で定められる数列とする。

(1) Wの任意の基底$\{u, v\}$に対して

$$a = \alpha u + \beta v$$

となる実数の定数α, βがただ一つ存在する。

(2) Wの基底$\{e_1, e_2\}$から基底$\{u, v\}$への基底変換の行列をPとすると，定数α, βは

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

で与えられる。

［証明］(1) aがWの元だから明らか。

(2) 写像$\phi: W \to \mathbb{R}^2$を通してWを$\mathbb{R}^2$と同一視する。このとき

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

である。(1)と$(u, v) = (e_1, e_2)P$であることより

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \alpha u + \beta v = (u, v)\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = (e_1, e_2)P\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

である。Pは正則であるから

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

となる。■

これで公式を証明するための準備ができた。以下では，公式ごとに節を改めて順次証明していく。

§5. 実固有値が 2 個の場合

この節では線形変換$\sigma: W \to W$が異なる 2 つの実固有値をもつ場合を考える。

σの異なる 2 つの実固有値を$\lambda, \mu (\lambda \neq \mu)$とする。

補題 10　数列$u = (u_1, u_2, u_3, \cdots), v = (v_1, v_2, v_3, \cdots)$を

$$u_n = \lambda^{n-1}, v_n = \mu^{n-1}$$

とすれば，$\{u, v\}$はWの基底になる。

特に，$u_1 = 1, u_2 = \lambda, v_1 = 1, v_2 = \mu$である。

［証明］固有値λ, μに属するσの固有ベクトルで，初項が 1 のものをそれぞれu, vとする。補題 6 より

$$u_n = \lambda^{n-1}, v_n = \mu^{n-1}$$

である。

このとき$\{u, v\}$はWの基底になる。■

補題 11　Wの基底$\{e_1, e_2\}$から補題 10 の基底$\{u, v\}$への基底変換の行列Pは

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda & \mu \end{pmatrix}$$

である。

［証明］写像$\phi: W \to \mathbb{R}^2$を通してWを$\mathbb{R}^2$と同一視すれば

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 \\ \mu \end{pmatrix}, e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

として

$$(u, v) = (e_1, e_2)P$$

となる行列Pを求めればよいが

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda & \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P$$

となるから，$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda & \mu \end{pmatrix}$である。■

以上の準備の下，公式 1 が証明できる。

［公式 1 の証明］漸化式（★）で定められる数列を$a = (a_1, a_2, a_3, \cdots)$とする。$\{u, v\}$を補題 10 における$W$の基底とする。

補題 9(1)より

$$a_n = \alpha\lambda^{n-1} + \beta\mu^{n-1}$$

である。

補題 9(2)，補題 11 より

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda & \mu \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\mu - \lambda}\begin{pmatrix} \mu & -1 \\ -\lambda & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

となる。■

§6. 実固有値が 1 個の場合

この節では線形変換$\sigma: W \to W$が 1 つの実固有値をもつ場合を考える。

σの実固有値をλとする。$\lambda = 0$とすると，補題 7 より特性方程式が$t^2 = 0$，すなわち$p = q = 0$である。よって漸化式（★）は$a_{n+2} = 0$なるつまらないものになるから$\lambda \neq 0$とする。

補題 12　数列$u = (u_1, u_2, u_3, \cdots), v = (v_1, v_2, v_3, \cdots)$を

$$u_n = \lambda^{n-1}, v_n = (n-1)\lambda^{n-2}$$

とすれば，$\{u, v\}$はWの基底になる。

特に，$u_1 = 1, u_2 = \lambda, v_1 = 0, v_2 = 1$である。

［証明］固有値λに属するσの固有ベクトルで，初項が 1 のものをuとする。補題 6 より

$$u_n = \lambda^{n-1}$$

である。

σの基底$\{e_1, e_2\}$の下での表現の行列Aは，補題 5 より

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q & -p \end{pmatrix}$$

である。$\lambda E - A$ （E は単位行列）を基本変形すると

$$\lambda E - A = \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ q & \lambda + p \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 0 & \lambda + p + \dfrac{q}{\lambda} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 0 & \dfrac{\lambda^2 + p\lambda + q}{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる。Aの固有値λの固有空間の次元は 1 だが，固有値λの重複度は 2 だからAは対角化可能ではない。

よって，Aのジョルダン標準形は$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$である。したがって

$$\sigma(v) = \lambda v + u$$

となる$v = (v_1, v_2, v_3, \cdots)$がある。

$$(v_2, v_3, v_4, \cdots) = \lambda(v_1, v_2, v_3, \cdots) + (1, \lambda, \lambda^2, \cdots)$$

であるから

$$v_n = \lambda v_{n-1} + \lambda^{n-2}$$
$$= \lambda(\lambda v_{n-2} + \lambda^{n-3}) + \lambda^{n-2}$$
$$= \lambda^2 v_{n-2} + 2 \cdot \lambda^{n-2}$$
$$= \cdots$$
$$= \lambda^{n-1} v_1 + (n-1) \cdot \lambda^{n-2}$$

$v_1 = 0$として

$$v_n = (n-1)\lambda^{n-2}$$

である。

このとき$\{u, v\}$はWの基底になる。■

補題 13　Wの基底$\{e_1, e_2\}$から補題 12 の基底$\{u, v\}$への基底変換の行列Pは

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}$$

である。

［証明］写像$\phi: W \to \mathbb{R}^2$を通してWを$\mathbb{R}^2$と同一視すれば

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

として

$$(u, v) = (e_1, e_2)P$$

となる行列Pを求めればよいが

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P$$

となるから，$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}$である。■

以上の準備の下，公式 2 が証明できる。

［公式 2 の証明］漸化式（★）で定められる数列を$a=(a_1,a_2,a_3,\cdots)$とする。$\{u,v\}$を補題 12 におけるWの基底とする。

補題 9(1)より

$$a_n=\alpha\lambda^{n-1}+\beta(n-1)\lambda^{n-2}$$

である。

補題 9(2)，補題 13 より

$$\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}=P^{-1}\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ \lambda & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -\lambda & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\end{pmatrix}$$

となる。

公式 2 は$\lambda=0$のときも成り立つ。■

§7. 実固有値をもたない場合

この節では線形変換$\sigma: W\to W$が実固有値をもたない場合を考える。

今の場合，σは共役な 2 つの虚数の固有値をもつ。それらを$\lambda,\bar{\lambda}=a\pm bi$（$a,b$は実数，$b\neq 0$）とする。

次の補題 14 の証明では今まで実数の範囲で考察してきた事項を複素数まで広げて考える。補題 6 は複素数の場合でも成り立つ。

補題 14　数列$u=(u_1,u_2,u_3,\cdots),v=(v_1,v_2,v_3,\cdots)$を

$$u_n=\frac{\lambda^{n-1}+\bar{\lambda}^{n-1}}{2},v_n=\frac{\lambda^{n-1}-\bar{\lambda}^{n-1}}{2i}$$

とすれば，$\{u,v\}$はWの基底になる。

特に，$u_1=1,u_2=a,v_1=0,v_2=b$である。

［証明］複素数まで範囲を広げることによって，固有値$\lambda,\bar{\lambda}$に属するσの固有ベクトルで，初項が 1 のものをそれぞれ$u^+=((u^+)_1,(u^+)_2,(u^+)_3,\cdots)$，$u^-=((u^-)_1,(u^-)_2,(u^-)_3,\cdots)$とする。補題 6 より

$$(u^+)_n=\lambda^{n-1},(u^-)_n=\bar{\lambda}^{n-1}$$

である。このu^+,u^-を使って$\{u,v\}$を

$$u=\frac{1}{2}(u^++u^-),v=\frac{1}{2i}(u^+-u^-)$$

で定義する。すなわち

$$u_n=\frac{\lambda^{n-1}+\bar{\lambda}^{n-1}}{2},v_n=\frac{\lambda^{n-1}-\bar{\lambda}^{n-1}}{2i}$$

である。

このとき$\{u,v\}$はWの基底になる。■

補題 15　Wの基底$\{e_1,e_2\}$から補題 14 の基底$\{u,v\}$への基底変換の行列Pは

$$P=\begin{pmatrix}1 & 0\\ a & b\end{pmatrix}$$

である。

［証明］写像$\phi: W\to\mathbb{R}^2$を通してWを$\mathbb{R}^2$と同一視すれば

$$u=\begin{pmatrix}1\\ a\end{pmatrix},v=\begin{pmatrix}0\\ b\end{pmatrix},e_1=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix},e_2=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$$

として

$$(u,v)=(e_1,e_2)P$$

となる行列Pを求めればよいが

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ a & b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}P$$

となるから，$P=\begin{pmatrix}1 & 0\\ a & b\end{pmatrix}$である。■

以上の準備の下，公式 3 が証明できる。

［公式 3 の証明］漸化式（★）で定められる数列を$a=(a_1,a_2,a_3,\cdots)$とする。$\{u,v\}$を補題 14 におけるWの基底とする。

補題 9(1)より

$$a_n=\alpha\frac{\lambda^{n-1}+\bar{\lambda}^{n-1}}{2}+\beta\frac{\lambda^{n-1}-\bar{\lambda}^{n-1}}{2i}$$

である。

補題 9(2)，補題 15 より

$$\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}=P^{-1}\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ a & b\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{b}\begin{pmatrix}b & 0\\ -a & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\end{pmatrix}$$

となる。■

§8. 隣接 4 項間の漸化式へ

いままで述べてきた手法を，隣接 4 項間の漸化式の問題に応用してみよう。

【例題 4】次の条件で定められる数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

$$a_1=a_2=1,a_3=9,a_{n+3}-3a_{n+2}+4a_n=0$$

［解］Wを

$$W=\{a=(a_1,a_2,a_3,\cdots)|a_{n+3}-3a_{n+2}+4a_n=0\}$$

で定義する。Wは 3 次元実ベクトル空間になる。さらにWの元e_1,e_2,e_3を

$$e_1=(1,0,0,-4,\cdots)$$

$$e_2=(0,1,0,0,\cdots)$$

$$e_3=(0,01,3,\cdots)$$

で定義すると$\{e_1,e_2,e_3\}$はWの基底になる。

Wの元$a=(a_1,a_2,a_3,\cdots)$に対して

$$\sigma(a)=(a_2,a_3,a_4,\cdots)$$

と定義すると$\sigma:W\to W$は線形変換になり

$$\sigma(e_1)=(0,0,-4,\cdots)=-4e_3$$

$$\sigma(e_2)=(1,0,0,\cdots)=e_1$$

$$\sigma(e_3)=(01,3,\cdots)=e_2+3e_3$$

である。したがって，σの基底$\{e_1,e_2,e_3\}$の下での表現の行列Aは

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -4 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

である。σの固有値はAの固有値と一致し

$$|tE-A|=\begin{vmatrix}t & -1 & 0\\ 0 & t & -1\\ 4 & 0 & t-3\end{vmatrix}=t\begin{vmatrix}t & -1\\ 0 & t-3\end{vmatrix}+4\begin{vmatrix}-1 & 0\\ t & -1\end{vmatrix}$$

$$=t(t^2-3t)+4=t^3-3t^2+4$$

$$=(t+1)(t-2)^2$$

より固有値は$-1,2$である（E は単位行列）。

補題 6 と同様にして，固有値$-1,2$に属するσの固有ベクトルとしてそれぞれ$u=(u_1,u_2,u_3,\cdots)$,

$v=(v,v_2,v_3,\cdots)$，ただし

$$u_n=(-1)^{n-1},v_n=2^{n-1}$$

（すなわち$u=(1,-1,1,-1,\cdots),v=(1,2,4,8,\cdots)$）をとる。$2E-A$を基本変形すると

$$2E-A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 0 & 2 & -1\\ 4 & 0 & -1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}4 & 0 & -1\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

となる。Aの固有値 2 の固有空間の次元は 1 だが，固有値 2 の重複度は 2 だからAは対角化可能ではない。よって，Aのジョルダン標準形は$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$である。したがって

$$\sigma(w)=2w+v$$

となる$w=(w_1,w_2,w_3,\cdots)$がある。

$$(w_2,w_3,w_4,\cdots)=2(w_1,w_2,w_3,\cdots)+(1,2,4,\cdots)$$

であるから

$$w_n = 2w_{n-1} + 2^{n-2}$$
$$= 2(2w_{n-2} + 2^{n-3}) + 2^{n-2}$$
$$= 2^2 w_{n-2} + 2 \cdot 2^{n-2}$$
$$= \cdots$$
$$= 2^{n-1} w_1 + (n-1)2^{n-2}$$

$w_1 = 0$として

$$w_n = (n-1)2^{n-2}$$

（すなわち$w = (0,1,4,12,\cdots)$）とする。このとき$\{u, v, w\}$はWの基底になり

$$a = \alpha u + \beta v + \gamma w$$

となる実数α, β, γが存在する。これより

$$a_n = \alpha(-1)^{n-1} + \beta 2^n + \gamma(n-1)2^{n-2}$$

である。

写像$\phi: W \to \mathbb{R}^3$を，Wの元$a = (a_1, a_2, a_3, \cdots)$に対して

$$\phi(a) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

で定義する。このとき写像$\phi: W \to \mathbb{R}^3$はWから$\mathbb{R}^3$への同形写像で，このϕを通してWは$\mathbb{R}^3$と同一視できる。

基底$\{e_1, e_2, e_3\}$から基底$\{u, v, w\}$への基底変換の行列Pは，$(u, v, w) = (e_1, e_2, e_3)P$と

$$u_1 = 1, u_2 = -1, u_3 = 1$$
$$v_1 = 1, v_2 = 2, v_3 = 4$$
$$w_1 = 0, w_2 = 1, w_3 = 4$$

より

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

である。よって，実数α, β, γは補題 9(2)と同様にして

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4 & -4 & 1 \\ 5 & 4 & -1 \\ -6 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

と求められる。以上より

$$a_n = 1 \times (-1)^{n-1} + 0 \times 2^{n-1} + 2 \times (n-1)2^{n-2}$$
$$= (-1)^{n-1} + (n-1)2^{n-1}$$

§9. おわりに

本稿では線形代数の視点に立って隣接 3 項間の漸化式について考察した。この考え方は線形代数の理論をもとにしているため，高校生が公式の証明を理解することは容易ではなく，指導することは困難である。また，これを応用するには使い勝手がよくない。しかし，線形代数の理論の応用例としては面白いのではないかと思う。今後もいろいろ研究してみたい。

≪参考文献≫

[1] 加藤文元，チャート研究所共編：『チャート式数学Ⅱ＋B』，数研出版，2023.

[2] 斎藤正彦：『線型代数入門』，東京大学出版会，1966.

（2026 年 10 月 30 日）