第136回数実研

シミュレーションの数理

偶然と必然を考える

数実研会員　松本睦郎

Episode1 ポアソン過程　南海トラフ地震

歴史に記録の存在する南海トラフの記録は右表による。西暦684年から1946年までの1263年間に13回の記録がある。「1年間で何回？」「10年あたりで何回？」とカウントされる整数の分布はポアソン分布になる。時間あたりの数がポアソン分布になる事象をポアソン過程という。活断層地震はある一定の時間幅で発生するするので、単純にポアソン分布で考える事はできない。単純に南海トラフ地震がポアソン過程と過程すると、１年間に地震が発生する確率は$\frac{13}{1263} = 0.01029...$となる。

南海トラフ地震の歴史

西暦	時代	地震名
684	飛鳥時代	白鵬（天武）
887	平安時代	仁和
1096	平安時代	永長東海
1099	平安時代	康和南海
1361	南北朝時代	正平（康安）東海
1361	南北朝時代	正平（康安）南海
1498	南北朝時代	明応
1605	江戸時代	慶長
1707	江戸時代	宝永
1854	江戸時代	安政東海
1854	江戸時代	安政南海
1944	昭和時代	昭和東南海
1946	昭和時代	昭和南海

1947年から2025年の79年間に南海トラフ地震が起こる確率を求める。西暦684年から1946年までの1263年間において１年間に地震が発生する確率は$\frac{13}{1263} = 0.01029...$なので、地震が発生しない確率は$1 - \frac{13}{1263} = \frac{1250}{1263} = 0.98970...$をもとに1947年から2025年の79年間に南海トラフ地震が全く発生しない確率は$\left(1 - \frac{13}{1263}\right)^{79} = 0.441597...$となる。従って1947年から2025年の79年間に南海トラフ地震が少なくても１回発生する確率はおよそ$1 - 0.441597 = 0.558403$となり79年間に地震発生確率はおよそ56%であった。

2025年1月15日に政府地震調査委員会は「今後30年以内にマグニチュード8から9級の地震が発生する確率はこれまでの70%から80%から80%以上になる。」と報道された。仮に2025年から2055年の30年間の発生確率を85%とする。

１年間地震の発生しない確率をxとすると30年間全く地震が発生しない確率はx^{30}なので、$x^{30} = 1 - 0.85$となる。これを解くと$x = 0.938721$

今後1年間に地震が発生する確率は$1 - 0.938721 = 0.061279$となる。

Table[RandomInteger[PoissonDistribution[0.061279], 30], {10}]

{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}

{0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0}

{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0}

{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}

{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0}

{1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,0, 0}

{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0}

{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0,0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0}

{0, 0, 0, 0,0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}

{0, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0}

10回のポアソン分布によるシュミレーションを実施した。１が地震発生０が地震が発生しない事を表す。30年間で地震が発生したのは9ケース地震が発生しなかったのは9行目のみであった。「30年間の発生確率を85％とする。」という事はいつ地震が来てもおかしくない状況にある。

Episode２　微分方程式　札幌市の人口予測

「人口予測モデル」はマルサスが「人口論」で示し、その後フェアフルストが修正して発表した。

（１）人口には限界がある。

（２）人口が限界になると増加率は低下する。

$P(t)$:人口、p_∞:人口限界値

$$\frac{dP(t)}{dt} = \gamma P(t))\left(\frac{P_\infty - P(t)}{P_\infty}\right)$$

この微分方程式を解くとロジステック曲線になる。ただしP_0:初期値

$$\int \frac{dP(t)}{P(t)(P(t) - P_\infty)} = -\int \frac{\gamma}{P_\infty} dt$$

$$-\int \frac{dP(t)}{P_\infty P(t)} + \int \frac{dP(t)}{P_\infty(P(t) - P_\infty)} = -\frac{\gamma t}{P_\infty} + C \quad C\text{:不定積分定数....（１）}$$

$$\text{左辺} = -\frac{1}{P_\infty} logP(t) + \frac{1}{P_\infty} log(P(t) - P_\infty) = \frac{1}{P_\infty} log\frac{P(t) - P_\infty}{P(t)}$$

$\dfrac{1}{P_\infty} log\dfrac{P(t) - P_\infty}{P(t)} = -\dfrac{\gamma t}{P_\infty} + C$ へ $t = 0$を代入　$log\dfrac{P_0 - P_\infty}{P_0} = CP_\infty$と（１）よりCを消去すると

$P(t)=\dfrac{P_\infty}{1+\left(\frac{P_\infty}{P_0}-1\right)e^{-\gamma t}}$ 微分方程式の解が得られる。

右表は札幌市の2015年から2025年までの人口推移である。札幌市の人口は　2021年をピークに減少し始めている事がわかる。このデータから微分方程式のパラメーターP_0, P_∞, γを推定する。

MathematicaにはFindFit関数があるので、これを活要すると。

$P_\infty \to 1.95327\times10^6$　　$\gamma \to 1.0$ と出力された。

札幌市人口の限界値は、およそ1953270人と算出される。

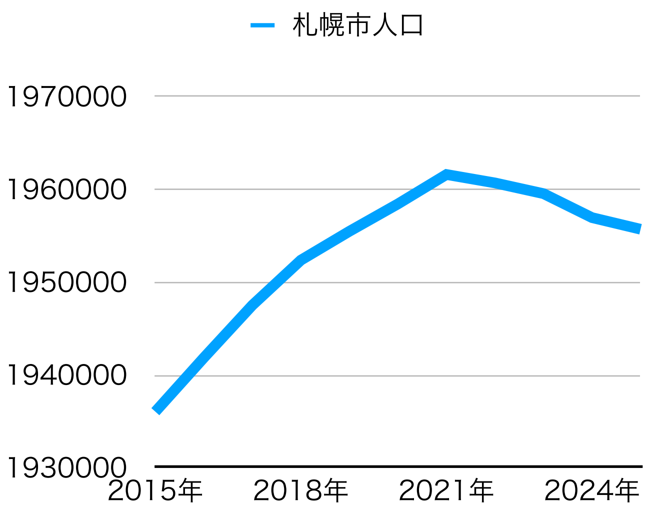
同様に若年層の人口「15歳から19歳人口」は減少し2023年からは微増している。FindFit関数でパラメータを推定する。

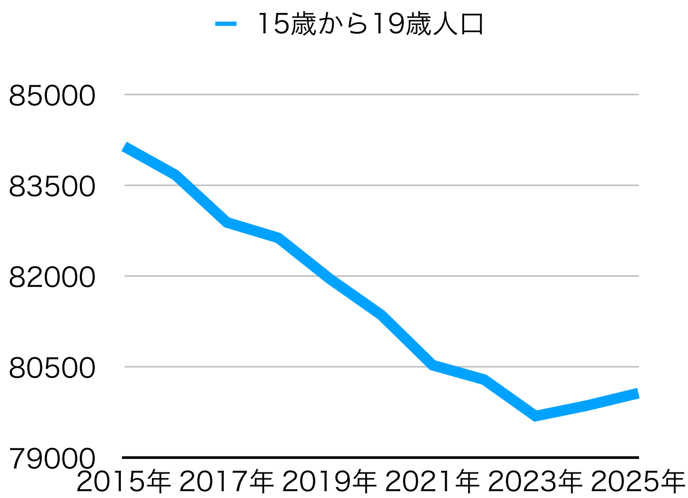
$P_\infty \to 81565.6$　$\gamma \to 1.0$

札幌市の15から19歳人口は81566人と推定される。

札幌市人口の推移

西暦	15歳から19歳人口	札幌市人口
2015年	84157	1936016
2016年	83684	1941832
2017年	82900	1947494
2018年	82644	1952348
2019年	81968	1955457
2020年	81372	1958408
2021年	80541	1961575
2022年	80303	1960668
2023年	79700	1959512
2024年	79874	1956928
2025年	80079	1955678





Episode 3　微分方程式　感染症予測

2020年からの新型コロナウイルス感染症の流行で用いられた「感染症モデル」も微分方程式型のシュミレーションである。一度感染すると免疫を保持し二度と他

人へ感染させることが無く感染期間中のみに他人へ感染させる数理モデルを「SIRモデル」について考える。

3タイプの状態

S	感受性 Susceptible	免疫が無く感染する可能性のある状態 $S(t)$:時刻tの集団全体に対する割合
I	感染性 Infectious	感染して感染性を有する状態 $I(t)$:時刻tの集団全体に対する割合
R	隔離や回復 Removed/Recovered	回復し免疫を保持、隔離、死亡した状態 $R(t)$:時刻tの集団全体に対する割合

$S(t) + I(t) + R(t) = 1$

３本の連立微分方程式で表示することができる。

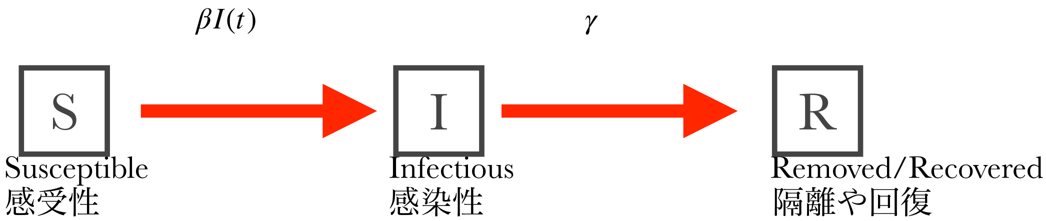
$$\frac{dS(t)}{dt} = -\beta S(t)I(t) \qquad \frac{dI(t)}{dt} = \beta S(t)I(t) - \gamma I(t) \qquad \frac{R(t)}{dt} = \gamma I(t)$$

β：感染率　１日当たり感染者１人から何人の未感染者へ感染させるか

γ：回復率・隔離率　１日当たりの回復・隔離数割合

$\beta I(t)$: 時刻 t における感染力

γ^{-1} : 感染から回復・隔離までの平均感染性期間



基本再生産数：R_0

初期の感染症流行時において、全員が感受性がある集団の中で一人の患者が感染性をもつ間に再生産する二次感染者数の平均値。自然状態で何も感染症対策をしない状態であり周囲にワクチン等の免疫を持たない集団にどのくらいの新規感染者数の平均値を基本再生産数（Basic Reproductio Number）。

$$\frac{dI(t)}{dt} = (\beta S(t) - \gamma)I(t)$$

新規感染者数が増加する場合は、$\beta S(t) - \gamma > 0$

時刻０において全員が感受性があるので、$S(0) = 1$

$$\beta - \gamma > 0 \qquad \beta > \gamma \qquad \frac{\beta}{\gamma} > 1$$

$R_0 = \dfrac{\beta}{\gamma}$　：基本再生産数（Basic Reproduction Number）

［基本再生産数の例］：麻疹は12から18、百日咳は12から18、風疹は6から7、ポリオ5から7、おたふく風邪は4から7、インフルエンザは1.5から1.8

実効再生産数：R_t

時点 t における再生産数を実効再生産数（Effective Reproduction Number）。地域の知事による「緊急事態宣言」や「Stay Home」等の対策実行下による人流制限による接触機会や頻度の減少。ワクチン接種による免疫獲得者数の増加。マスク着用による感染率の減少により時刻 t とともに再生産数は変化する。基本的に実効再生産数は各感染者の感染経路を追跡することによって求める。感染者の行動把握や濃厚接触者の感染の調査を行う。

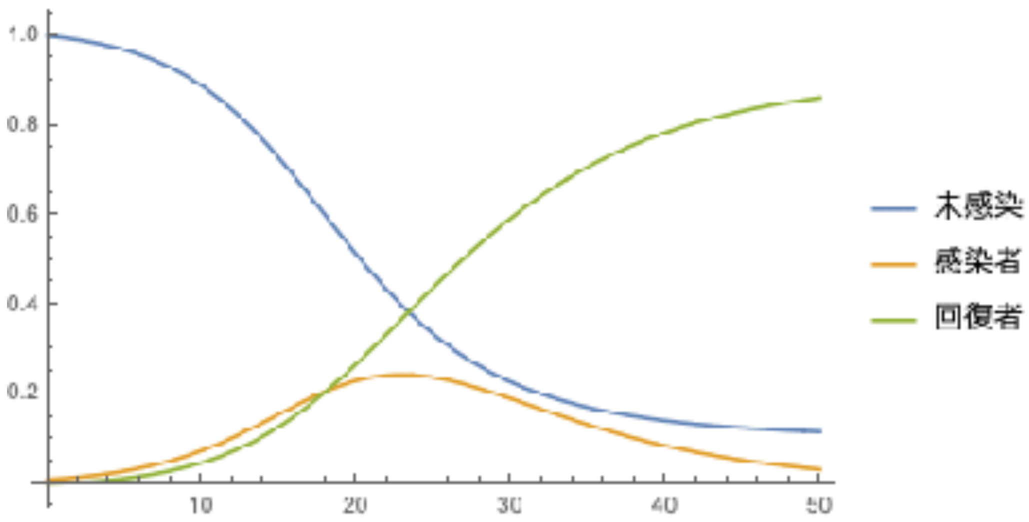
臨界免疫割合

効果 ϵ $(0 < \epsilon < 1)$ のワクチン接種率 p $(0 < p < 1)$とすると、ワクチン未接種率 $1 - p$ となる。免疫を持たない人の割合は $1 - \epsilon p$ になる。免疫を持たない人の再生産数は $(1 - \epsilon p)R_0$なので、流行終息条件は$(1 - \epsilon p)R_0 < 1$ これをpについて解くと

$p > \dfrac{1}{\epsilon}\left(1 - \dfrac{1}{R_0}\right)$ ワクチン接種率目標で右辺を臨界免疫割合

コロナ感染症初期動態

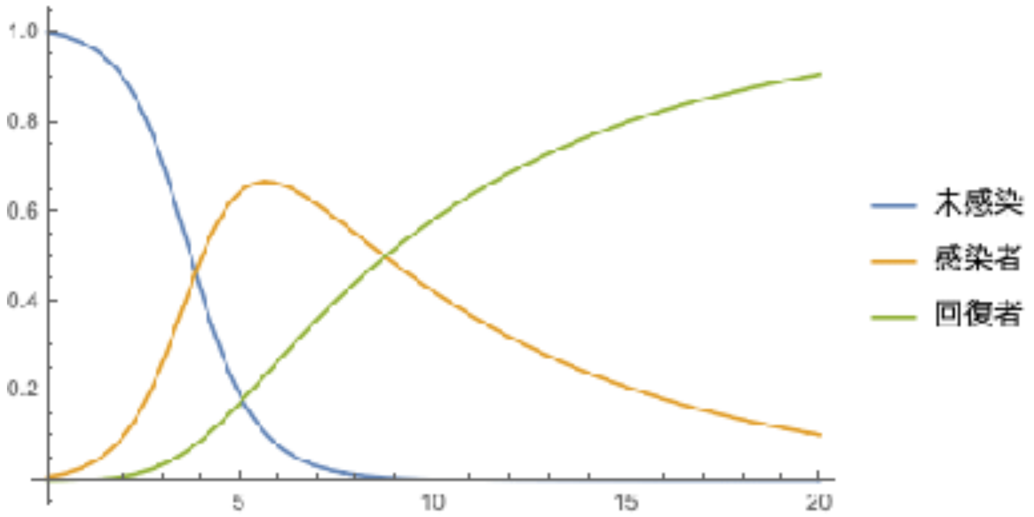
新型コロナ感染症初期の基本再生産数が地域によって異なるが$R_0 = 1.4 \sim 2.5$であった。今、$R_0 = 2.5$とする。感染期間が平均7日である流行をSIRモデルでシュミレートする。感受性1、感染者0.01から始まる流行動態



22〜23日目前後で約半分が既感染となり、24日目から新規感染者は減少していく。

オミクロン流行動態

感染力が強かったオミクロン型の基本再生産数$R_0 = 9.5$であり、感染期間が平均7日である。



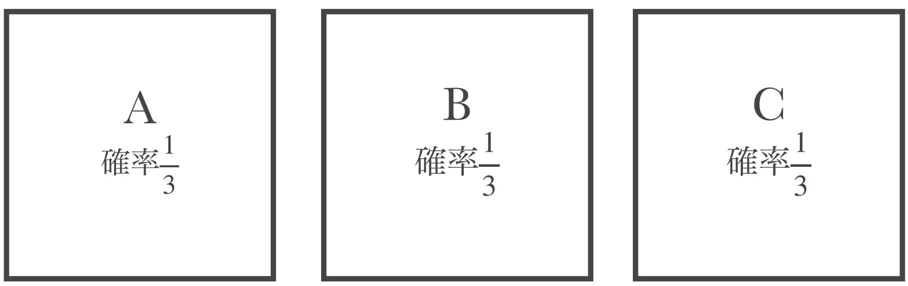
４日過ぎに約半分が既感染となり７日目から新規感染者は減少

Episode４　条件つき確率　モンティ・ホール問題

３個の箱があり、その１個に賞品が入っている、残り２個は空箱である。

回答者は３個の箱のどれか１個を選択する。箱の中の賞品をもらうことができる。今、回答者が、ある１個を選択した後、賞品の入った箱を知っている司会者のモンティが残り２箱のうち、１個の空箱を開ける。ここで回答者は、「最初に選んだ箱のままか、残りの箱に変更しても良い。」選択ができる。

回答者は箱を変更した方が良いか、変更しない方が良いか？



Step1 ３個の箱のどれか１個に賞品がある。

Step2 回答者が１個の箱を選択する。

Step3 司会者が回答者が選択した箱以外の空箱を開ける。

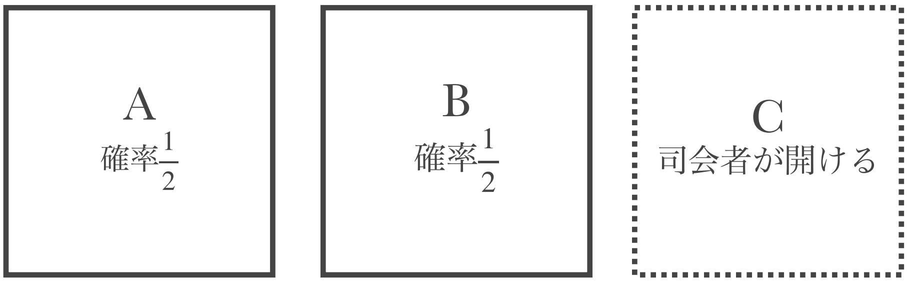
Step4 回答者は最初に選択した箱と残った箱を変更しても良い。

Step5 回答者は箱を変更した方が良いか、変更しない方が良いか？

Step2において回答者が箱Aを選択したと仮定しても一般性は保たれる。

司会者が箱Cを開けてみせる。

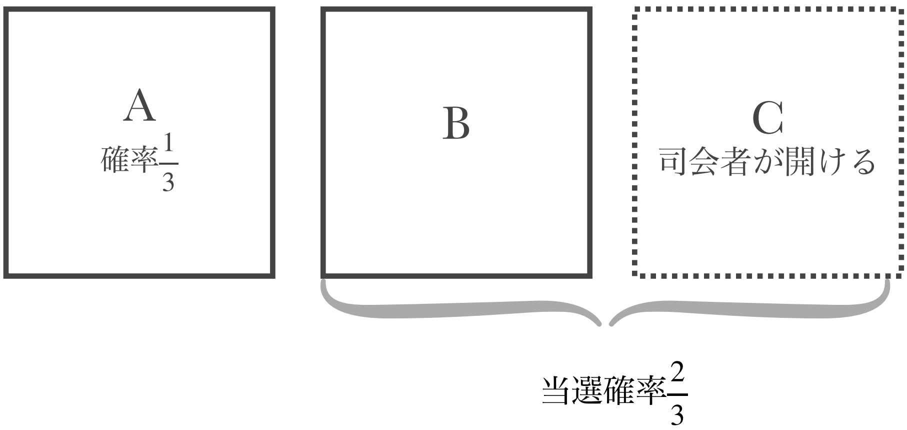
【考え方１】箱Aと箱Bになったので、箱Aの当選確率は$\frac{1}{3} \to \frac{1}{2}$に変化する。



当選確率は五分五分になる。

【考え方２】箱Cに賞品が無い事が判明しても、箱Aに賞品のある確率は変化しない。箱Aの当選確率は$\frac{1}{3}$のままである。

箱Bの当選確率は$\frac{1}{3} \to \frac{2}{3}$に上昇した。



【考え方１】と【考え方２】はどちらが正解か？

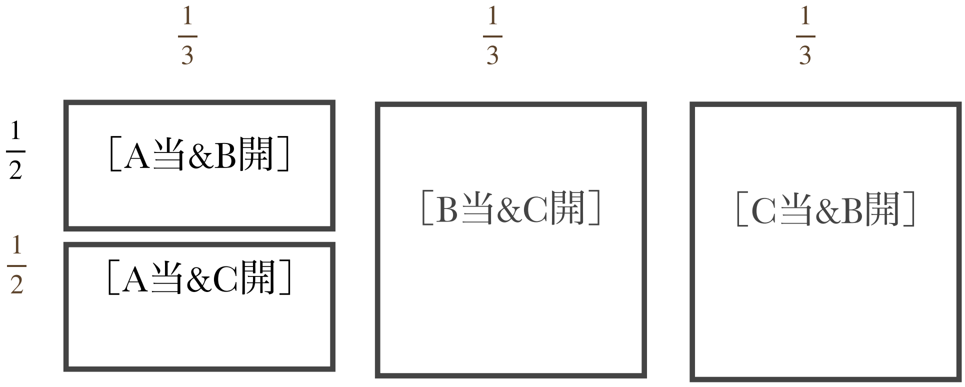
【条件付き確率の設定】

条件１　最初に回答者が箱Aを選択したとする。

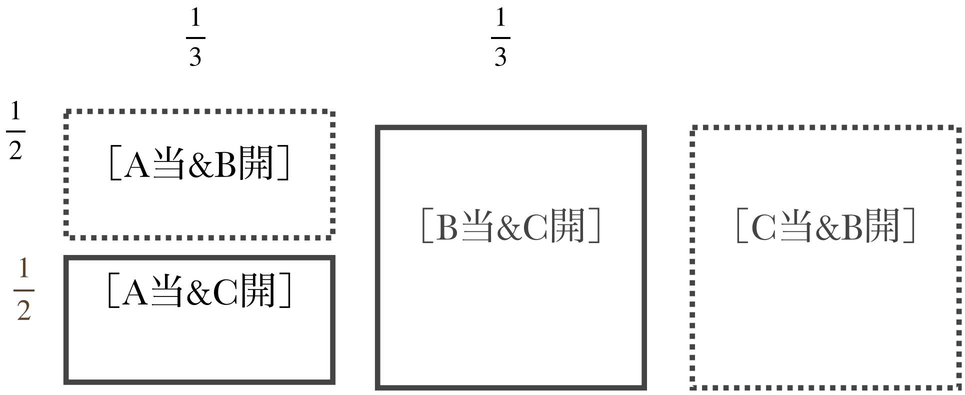
条件２　箱Aに賞品があるならば、司会者は箱Bか箱Cを$\frac{1}{2}$の確率で開ける。

条件３　箱Bに賞品があるのならば、司会者は箱Cを1の確率で開ける。

条件４　箱Cに賞品があるのならば、司会者は箱Bを1の確率で開ける。



条件１から４を考慮に入れたら、上図の様な４つの世界が想像される。
条件５　更に、司会者が箱Cを開けると。
箱Cには賞品が存在しない事が明らかになる。
［C当&B開］と［A当&B開］の可能性は消滅する。



箱Aにある確率：箱Bにある確率＝$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}:\frac{1}{3}=1:2=\frac{1}{3}:\frac{2}{3}$

最初に箱Aを選択したものの、司会者が箱Cを開けたので箱Bに変更した方が賞品を得る確率が２倍になる。【考え方２】の方が正しい。

【ベイズの定理による解答】

設定条件として、
⑴回答者は最初に箱Aを選択する。
⑵箱Cは空箱とする。
⑶賞品のある箱は箱Aか箱Bである。
⑷箱Cが空箱と知っている司会者は箱Cを開ける事になる。

$P(A)$：最初箱Aに賞品がある確率
$P(Copen)$：司会者が箱Cを開ける確率
（Ⅰ）回答者が変更しない場合：箱Aに賞品のある確率を求める。

ベイズの定理より

$$P(A|Copen) = \frac{P(Copen|A)P(A)}{P(Copen)}$$

$P(Copen|A)$：箱Aに賞品があるときに箱Cを開ける確率

箱Aを選択した回答者にとって司会者は箱Bか箱Cを開けるかの２通りなので、

$$P(Copen|A) = \frac{1}{2}$$

最初に回答者は、３箱の中から箱Aを選択したので

$$P(A) = \frac{1}{3}$$

$$P(Copen) = P(Copen|A)P(A) + P(Copen|B)P(B) + P(Copen|C)P(C)$$

$P(Copen|B) = 1$：箱Bに賞品があるときは司会者は必ず箱Cを開ける。

$P(Copen|C) = 0$：箱Cに賞品があるときは司会者は箱Cを開けない。

$$P(Copen) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3} + 0 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

$$P(A|Copen) = \frac{P(Copen|A)P(A)}{P(Copen)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

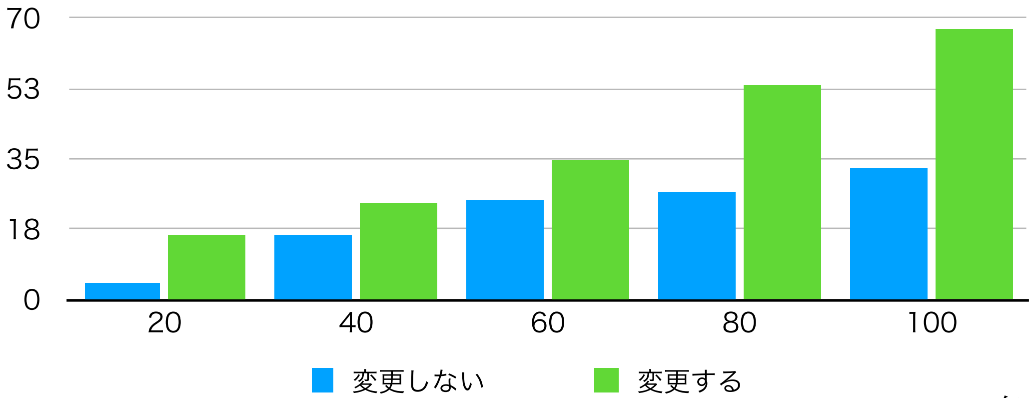
（II）回答者が箱を変更する場合：箱Bに賞品のある確率を求める。

$$P(B|Copen) = \frac{P(Copen|B)P(B)}{P(Copen)} = \frac{1 \times \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

「箱を変更する」方が「箱を変更しない」より賞品が当る確率は２倍である。

シュミレーション結果

実験回数	変更しない	変更する
20	4	16
40	16	24
60	25	35
80	27	53
100	33	67



実験回数を増やす毎に、「箱を変更する」結果数（緑色）が「箱を変更しない」結果数（青色）の２倍に接近してる事が理解できる。

更に、箱の数を４個A,B,C,Dにして考えてみよう。

設定条件として、

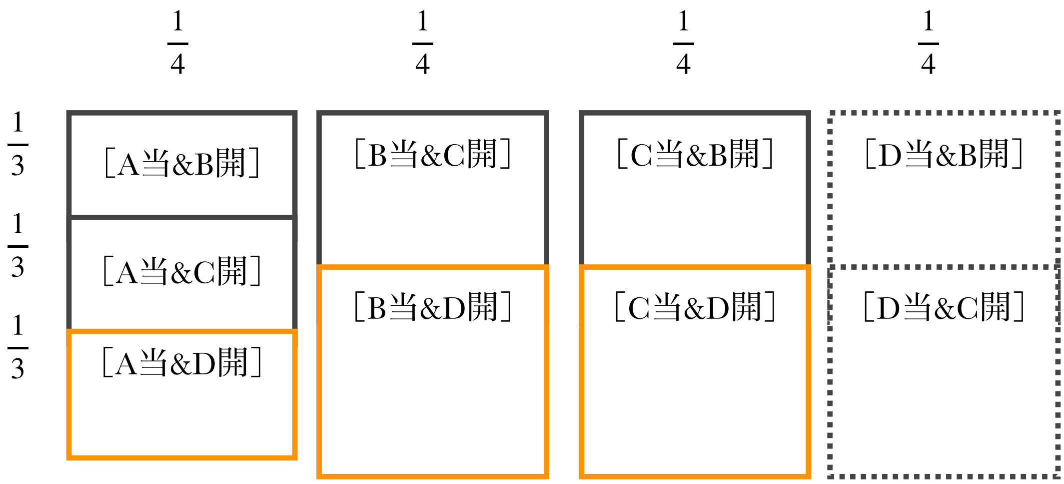
⑴回答者は最初に箱Aを選択する。

⑵箱Dは空箱とする。

⑶賞品のある箱は箱A,B,Cである。

⑷箱Dが空箱と知っている司会者は箱Dを開ける事になる。この場合賞品は箱A,B,Cのどれかに存在する。

このとき、回答者は箱を変更した方が良いか、変更しない方が良いか？



箱Aに賞品があるときは、司会者は箱B,C,Dを開ける可能性がある。

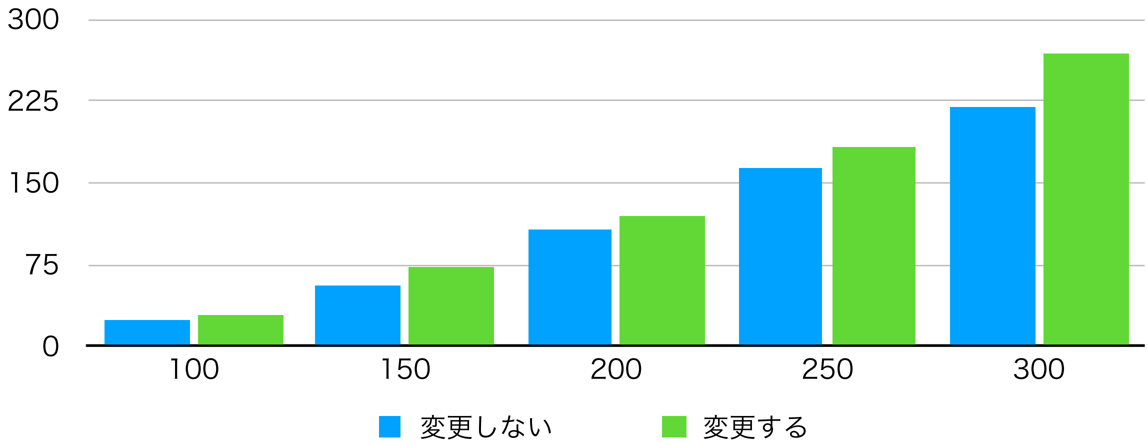
［A当&D開］の確率＝$\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$　［B当&D開］の確率=$\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$

［C当&D開］の確率=$\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$

非変更当選確率=$\dfrac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{12}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}=\frac{1}{4}$、変更当選確率$\dfrac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{12}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}=\frac{3}{8}$

$\frac{1}{4}:\frac{3}{8}=2:3$となり、最初に選択した箱から変更した方が当選確率が若干上がる事がわかる。

シュミレーション結果-1			
実験回数	変更しない	変更する	引き分け
100	23	29	48
150	55	72	23
200	107	118	25
250	163	182	95
300	220	269	189



「確率分布」、「微分方程式」更に最近話題になっているAI技術の基本である「ベイズ統計学」を使って自然現象や社会現象の模擬実験により現実世界を近似できる様になって来た。近似した結果が直ちに現実社会に当てはまるとは限らないが、現実社会で発生する様々な出来事をモデル化して数学的に分析することは、真相解明に役に立つと思う。

［参考図書］

Pythonコンピューターシミュレーション入門
人文・自然・社会科学の数理モデル
橋本洋志＋牧野浩二（著）

ベイズ統計学入門
小林寛之（著）

Mathematica クックブック
Sal Mangano（著）
松田裕幸（訳）