2次関数のグラフ

$y=ax^2$ と $y=a(x-p)^2$, $y=a(x-p)^2+q$ の関係

平行移動 … グラフの形を変えない移動

$$\begin{tikzcd} & y=2(x-3)^2+4 \\ y=2x^2 \arrow[ur, "\text{x軸方向に3, y軸方向に4}"] \arrow[r, "\text{x軸方向に3}"'] & y=2(x-3)^2 \arrow[u, "\text{y軸方向に4}"'] \end{tikzcd}$$

頂点 $(3, 4)$　軸 $x=3$

一般的に表すと

$y=a(x-p)^2+q$　頂点 (p, q)　軸 $x=p$

グラフの形を決める数

$a>0$ のとき　　$a<0$ のとき

下に凸

上に凸

$f(\sqrt{3}-2)=-(\quad)^2-4(\quad)$.

9. $f(x)=-x^2-4x-1$

(1) $f(0)=$

x に 0 を代入した式の値のこと

$f(-1)=$

(2) グラフの式の関係が理解できたら。

$y=-x^2-4x-1$ で表された2次関数のグラフ

→ $y=a(x-p)^2+q$ の形に直して、グラフをかく。

└→ 平方完成するという。

$(x+a)^2=x^2+2ax+a^2$ から

$x^2+2ax+a^2=(x+a)^2$

$x^2+2ax=(x+a)^2-a^2$

$\boxed{\text{重要}}$ 平方完成を作る式

2乗を引く。

$x^2+2ax=(x+a)^2-a^2$

xの係数を半分にする

$y=\underline{-x^2-4x}-1$

$=-(x^2+4x)-1$

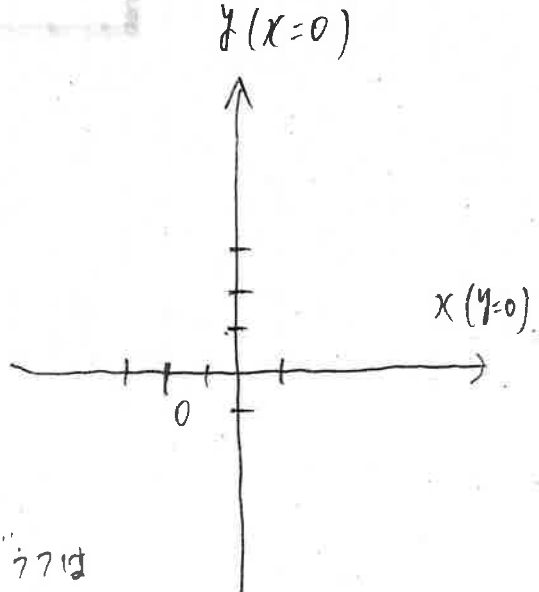
この計算は何度も練習するしかないです。

$=-\{(x+\quad)^2-\quad\}-1$

$=-(x+\quad)^2+\quad-1$

$=-(x+\quad)^2+\quad$ ← このグラフは $y=-x^2$ のグラフが基本でしたね！

頂点（　,　） 軸 $x=$



教P126　C 11

$y=ax^2+bx+c \xrightarrow[\text{関して対称移動}]{\text{原点に}} \boxed{} \xrightarrow[\text{y軸方向に}-3]{\text{x軸方向に}2} y=-3x^2$

x軸方向に ＿
y軸方向に ＿

＿＿＿＿

解　$y=-3x^2$ …① を x軸方向に ＿＿, y軸方向に ＿＿

だけ平行移動すると

$x \to$ ＿＿＿　$y \to$ ＿＿＿ を ① の式に代入

＿＿＿ $= -3(\qquad)^2$

整理すると

この式を ＿＿＿ に関して対称移動すると

$(x, y) \to (\quad , \quad)$ を 上の式 x, y に代入

この式は $y=ax^2+bx+c$ のグラフのことだから

係数を比較すると

$a=\qquad , b=\qquad , c=\qquad$ 〃

C12. $y=2x^2+1 \xrightarrow{平行移動} \boxed{}$

頂点が $y=3x-2$ 上
かつ $(3,12)$ を通る。

$\boxed{ヒント}$ 平行移動とは この移動で変わらない係数はどこですか。
頂点の x 座標を t とおくと、頂点の座標は t を使って
どう表されるか。

$\boxed{解}$ $y=2x^2+1$ を平行移動したグラフで、頂点は
直線 $y=3x-2$ 上にあるので、x 座標を t とおくと、
頂点 $(t, \quad)$ と表される。
よって、求める2次関数の式は、

$y=$ ___ $(x$ ___ $)^2+$ ______ とおける。…①

①は $(\overset{x}{3}, \overset{y}{12})$ を通るので ← ①の x, y に代入できる

$\quad = \quad (\qquad)^2 +$
______

t についての2次方程式を解くと、

$t=$ 　のとき

$t=$ 　のとき

$t=$ ______

求める2次関数は

______

平行移動，対称移動

$y = 2x^2 \cdots ①$

$y = 2(x-3)^2 + 4 \cdots ②$

②は $y=2x^2$ のグラフを
x軸方向に＿＿，y軸方向に＿＿
だけ平行移動したグラフ.

②を少し変形すると

$y-4 = 2(x-3)^2 \cdots ③$

①と③を見比べると
$y \to y-4 \quad x \to x-3$
を代入したら平行移動した式が求まることを表している。

$\boxed{重要}$ 一般に
$y = f(x)$ と表すと
このグラフを x軸方向に p
y軸方向に q だけ
平行移動したグラフは

$y-q = f(x-p)$ と表せる

①→②の求め方
$P(x, y) \to P'(x, -y)$

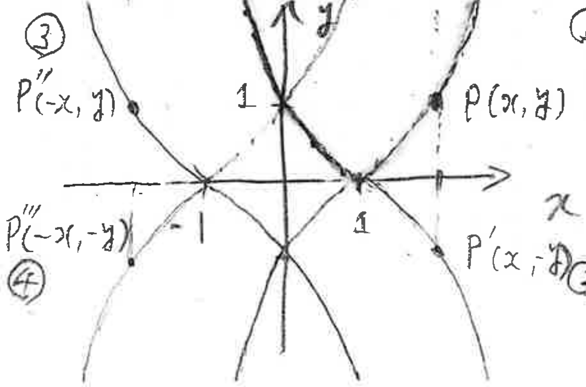
$y=(x-1)^2$
$-y=(x-1)^2$
$y=-(x-1)^2$

①→③
$P(x, y) \to P''(-x, y)$

$y=(x-1)^2$
$y=(-x-1)^2$
$=(x+1)^2$

対称移動

グラフは無数の点の集まり



① $y=(x-1)^2$ $\xrightarrow{y軸に関して対称移動}$ ③ $y=(x+1)^2$

x軸に関して対称移動 ↓
② $y=-(x-1)^2$

原点に関して対称移動 ↘
④ $y=-(x+1)^2$

一般に、

$y=f(x)$ のグラフについて

x 軸に関して対称移動 → $-y=f(x)$

y 軸に関して対称移動 　$y=f(-x)$

原点に関して対称移動 　$-y=f(-x)$

10 　$y=-2x^2+3x+1$

(1) x 軸方向に -3, y 軸方向に 4

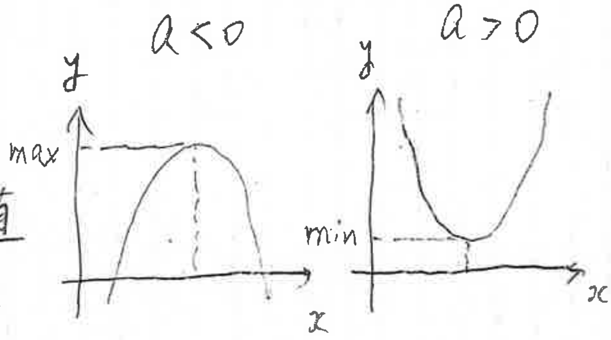
$x \to x$＿＿ 　$y \to y$＿＿

求める式：＿＿＿ $=-2(\quad)^2+3(\quad)+1$

展開して式を整理すると、

教P7　2次関数の最大・最小　$y=a(x-p)^2+q$

・重要事項



・グラフをイメージする。
・一番高い所…最大値
・一番低い所…最小値

定義域（xの値の範囲）に制限がある場合

注目点　・aの符号…グラフの形を判断する。

・頂点（軸の位置）

・定義域の端の値

2次関数の決定

与えられた条件で関係の式を求める。

① グラフの頂点、軸または最大値、最小値

→ $y=a(x-p)^2+q$ とおく。

② グラフの3点を通る。

→ $y=ax^2+bx+c$ とおく。

③ x軸と$(\alpha,0)$, $(\beta,0)$で交わる。

→ $y=a(x-\alpha)(x-\beta)$ とおく。

教P8 2次方程式

解く手順

因数分解

〇

× ― 解の公式

① $ax^2+bx+c=0$ の解

$x=$

$ax^2+2b'x+c=0$ の解

$x=$

② 判別式 $D=b^2-4ac$

判別式の符号		実数解の個数
$D>0$	$\Longleftrightarrow$	
$D=0$	$\Longleftrightarrow$	
$D<0$	$\Longleftrightarrow$	

放物線と直線の共有点

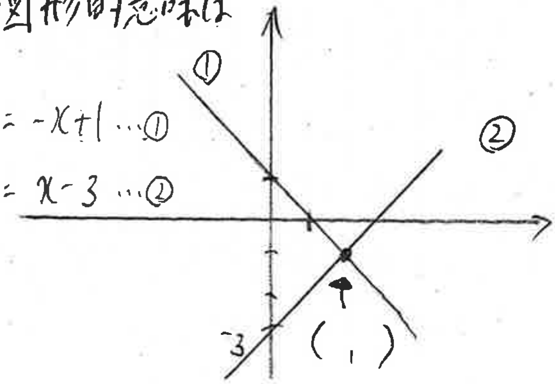
連立方程式

$$\begin{cases} x+y=1 & \cdots ① \\ x-y=3 & \cdots ② \end{cases}$$

図形的意味は

$y=-x+1 \cdots ①$

$y=x-3 \cdots ②$



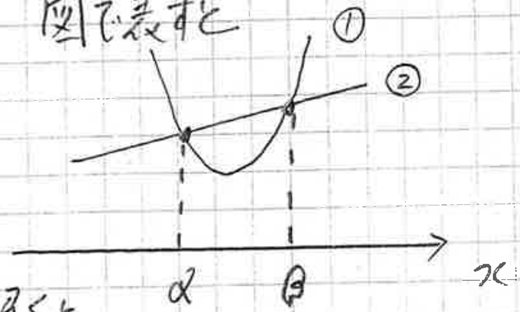
一般的に連立方程式を解く

⟶

$y = ax^2 + bx + c \cdots$ ①

$y = mx + n \cdots$ ②

図で表すと



① と ② の連立方程式を解くと

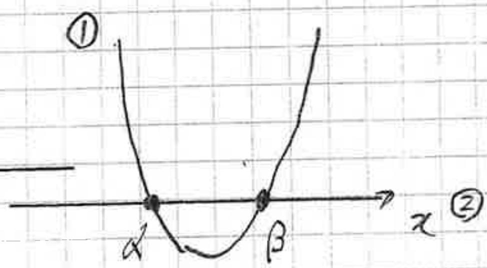
$ax^2 + bx + c = mx + n$ ← 2次方程式を解く。

$x = \alpha, \beta$ ← 共有点の＿＿＿＿

特に ② が x 軸のとき $y =$ ＿＿ なので

$ax^2 + bx + c =$ ＿＿

図で表すと



$x = \alpha, \beta$ ← x 軸との共有点の＿＿＿＿

このことから
次のことが分かる。

共有点の個数と解の個数は＿＿＿＿。

判別式 D の符号		解の個数		共有点の個数
$D > 0$	⟺		⟺	
$D = 0$	⟺		⟺	
$D < 0$	⟺		⟺	

数P9　2次不等式

ポイント．1．2次方程式の解とx軸と2次関数の共有点のx座標の関係を理解する。

2．2次不等式を解く意味を理解する。

3．以上を踏まえて．まとめ表を説明できるようにする。

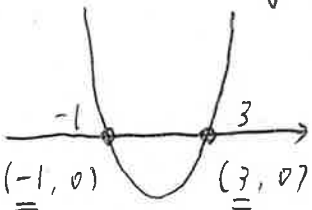
1．

$x^2-2x-3=0$

$(x-3)(x+1)=0$

$x=3,\ -1$ ← x軸との共有点x座標

$y=x^2-2x-3$



2．

$x^2-2x-3<0$

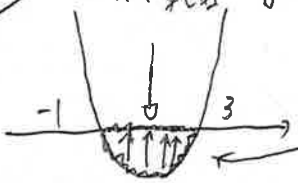
$(x-3)(x+1)<0$

$-1<x<3$

グラフの範囲のxの範囲

$y=x^2-2x-3<0$

$y<0$



グラフのこの部分

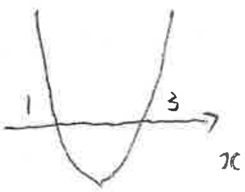
3．2次不等式の解き方

(1) $x^2-4x+3\geqq 0$

$x^2-4x+3=0$

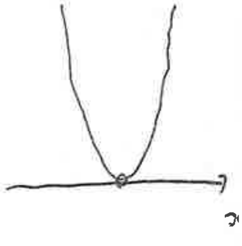
$(x-3)(x-1)=0$

$x=1,\ 3$



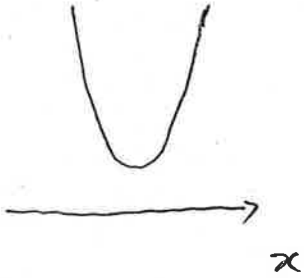
(2) $x^2-4x+4\geqq 0$

$x^2-4x+4=0$



(3) $x^2-4x+5>0$

$x^2-4x+5=0$



2次不等式の応用

連立不等式 $\begin{cases} x^2-x-6<0 & \cdots ① \\ x^2-6x+5 \leqq 0 & \cdots ② \end{cases}$

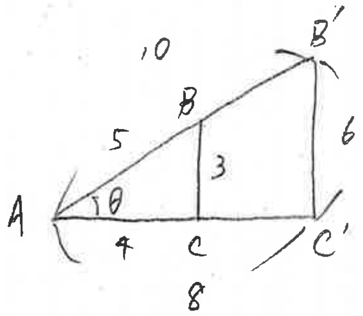
ポイント ①,②を解き、共通部分を不等号で表す。

A $-2<x\leqq 1$

問題 2次不等式 $x^2+kx+k+3>0$ の解がすべての実数となるように定数kの値の範囲を求めよ。

A $-2<k<6$

直角三角形と三角比



三角比の定義

角θの大きさが変わらなければ、

△ABC や △AB'C' のような

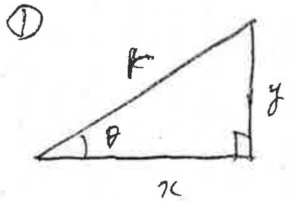
三角形の大きさに関わらず

	△ABC	△AB'C'	
$\dfrac{たて}{斜め}$ =	$\dfrac{3}{5}$	$\dfrac{6}{10}=\dfrac{3}{5}$	← $\sin\theta$
$\dfrac{よこ}{斜め}$ =	$\dfrac{4}{5}$	$\dfrac{8}{10}=\dfrac{4}{5}$	← $\cos\theta$
$\dfrac{たて}{よこ}$ =	$\dfrac{3}{4}$	$\dfrac{6}{8}=\dfrac{3}{4}$	← $\tan\theta$

という記号で表した。

一般に

①



② 分母を払うと

$\sin\theta =$ → $y = r\sin\theta$

(たて)=(斜め)×サインの値

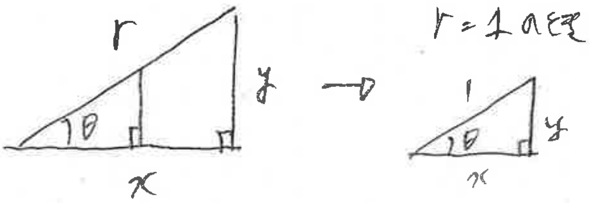
$\cos\theta =$ → $x = r\cos\theta$

(よこ)=(斜め)×コサインの値

$\tan\theta =$ → $y = x\tan\theta$

(たて)=(よこ)×タンジェントの値

三角比の相互関係



三角形の大きさに関わらず

sinθ, cosθ, tanθ の値は

角θの大きさによって決まる。

r=1のときの直角三角形

を考えると.

$$\sin\theta = \frac{y}{1} = y \cdots (i)$$

$$\cos\theta = \frac{x}{1} = x \cdots (ii)$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \cdots (iii)$$

と表せる。

(i)(ii)を(iii)に代入すると

① $\tan\theta =$ ＿＿＿＿＿＿

次に 三平方の定理 より

$$x^2+y^2=1^2 \cdots (iv)$$

この式に(i),(ii)を代入すると

$$(\quad)^2+(\quad)^2=1$$

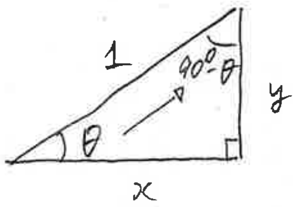
② ＿＿＿＿＿＿＿＿ $=1$

②の式の両辺を$\cos^2\theta$で割って①の式より

$$\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}+\frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta}=\frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2+1=\frac{1}{\cos^2\theta}$$

③ $1+$ ＿＿＿＿ $=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$



$\sin\theta = y$　　$\sin(90° - \theta) = x$

$\cos\theta = x$　　$\cos(90° - \theta) = y$

$\tan\theta = \dfrac{y}{x}$　　$\tan(90° - \theta) = \dfrac{x}{y}$

$$\downarrow$$

$$\frac{\tan\theta}{1} = \frac{y}{x}$$

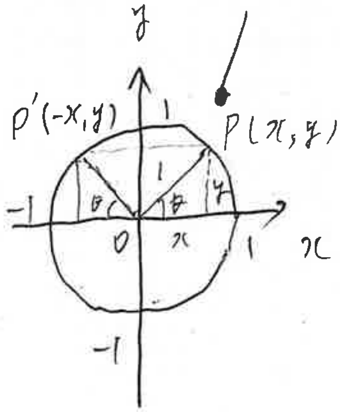
$$\frac{1}{\tan\theta} = \frac{x}{y}$$

以上より　$\sin(90° - \theta) =$ ______

$\cos(90° - \theta) =$ ______

$\tan(90° - \theta) =$ ______

半径1の円を単位円という。



$\sin\theta = \dfrac{y}{1} = y$　点Pのy座標

$\cos\theta = \dfrac{x}{1} = x$　点Pのy座標

$\tan\theta = \dfrac{y}{x}$　OPの傾き。

$\sin(180° - \theta) = y$

$\cos(180° - \theta) = -x$

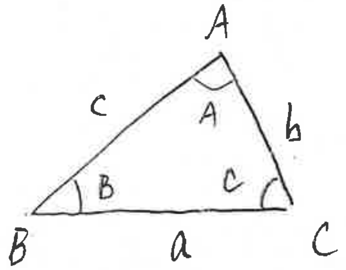
$\tan(180° - \theta) = \dfrac{y}{-x} = -\dfrac{y}{x}$

以上より　$\sin(180° - \theta) =$ ______

$\cos(180° - \theta) =$ ______

$\tan(180° - \theta) =$ ______

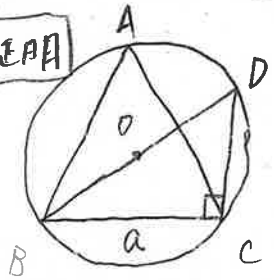
教P11. 正弦定理と余弦定理，三角形の面積



$\triangle ABC$について，$BC=a$，$AC=b$，$AB=c$，面積をS，外接円の半径をRとする。

① 正弦定理　$\dfrac{a}{\sin A} = \underline{\qquad} = \underline{\qquad} = 2R$ …①

証明



図より $\angle A = \angle D$（円周角の性質）

BDは円の直径

$\angle DCB = \angle R$

$\triangle BDC$において

$\sin D = \dfrac{a}{2R}$

$\sin A = \dfrac{a}{2R}$

$2R = \dfrac{a}{\sin A}$

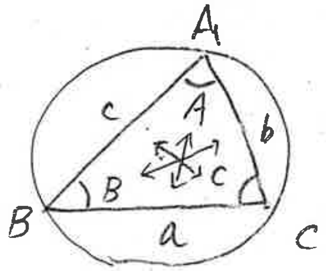
同様に

$2R = \dfrac{b}{\sin B}$　$2R = \dfrac{c}{\sin C}$

よって ①の式が成立つ。

正弦定理の適用場面

定理の式の形から定まる。



(i) 2組の向かい合う辺と角が関係している場合。

(ii) 外接円の半径Rが関係している場合.

② 余弦定理

$a^2 = b^2 + c^2 \underbrace{- 2bc\cos A}$ ← この部分が無ければ見覚えある定理ですよね！

他の2つの式は導きこう！

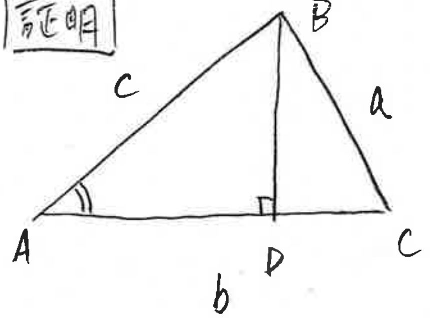
$b^2 =$ ＿＿＿＿＿＿

$c^2 =$ ＿＿＿＿＿＿

式を $\cos A =$ に変形すると

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$\boxed{\text{証明}}$



図より

$\cos A = \frac{AD}{c}$ 　 $AC = b$, $AD = c\cos A$

$AD = c\cos A$ 　 $CD = b - c\cos A$ …①

$CD = AC - AD$ 　 $\sin A = \frac{BD}{c}$

$BD = c\sin A$ …② 　 $BC = a$, ①, ② より

$\triangle BDC$ において三平方の定理より

$BC^2 = BD^2 + CD^2$

$a^2 = (c\sin A)^2 + (b - c\cos A)^2$

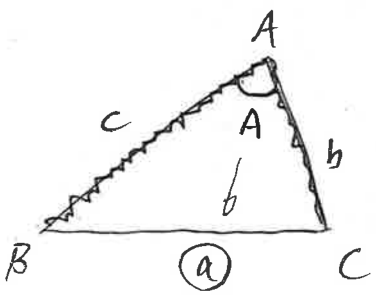
$= c^2\sin^2 A + b^2 - 2bc\cos A + (c\cos A)^2$

$= c^2(\sin^2 A + \cos^2 A) + b^2 - 2bc\cos A$

$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ より

$= c^2 + b^2 - 2bc\cos A$

$= b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ //



余弦定理の適用場面

(i) 2辺とその間の角が関係している場合.

(ii) 3辺の長さが分かっている場合.

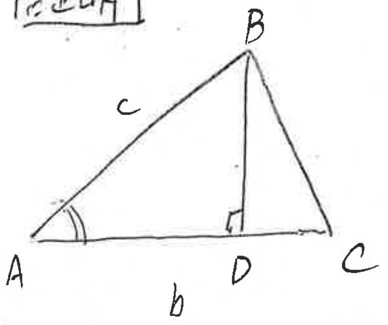
③ △ABCの面積

$S=\frac{1}{2}bc\sin A$　他2つの式は導きこう！

$S=$ ＿＿＿＿＿＿

$S=$ ＿＿＿＿＿＿

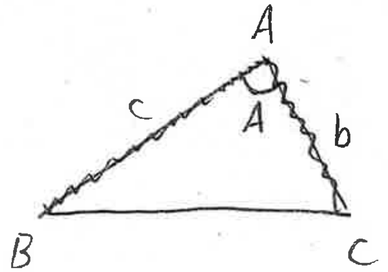
証明



$S=\frac{1}{2}AC\times BD$ ← $\frac{1}{2}\times$(底面)$\times$(高さ)

$\sin A=\frac{BD}{c}$

$BD=c\sin A$　$AC=b$ より



$S=\frac{1}{2}b\times c\sin A$

$=\frac{1}{2}bc\sin A$ ← 2辺とその間の角のsinの値

(注) cosではないです！

大前提として 三角比の問題では必ず図形をかこう！

→ 今までの定理の適用場面を覚えても与えられた条件が図形のどの角や辺の長さのことなのか把握しなければ使える定理が分からない。

④ 空間図形への応用

空間図形の問題 → 関係する角や辺を含む平面図形を取り出して考える。

教P73 例題8 三角形の外接円，内接円の半径

使う公式 余弦定理 ________________

正弦定理 ________________

三角形の面積S ________________

内接円の半径をrとすると $S=\frac{1}{2}r(a+b+c) \cdots ①$

①は $S=\triangle BCI+\triangle CAI+\triangle ABI$

$=\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}br+\frac{1}{2}cr$

$=\frac{1}{2}r(a+b+c)$ //

教P74

例題9 円に内接する四角形の面積

使う公式 余弦定理

円に内接する四角形の対角の和は ______

$\cos(180°-\theta)=$ ______

三角方程式

三角形の面積S

考え方 正弦定理，余弦定理は ______ ついて成り立つ定理である。
（図形）

教P.75 例題10 測量への応用

使う公式　正弦定理

三角比の定義　$\frac{たて}{よこ}=$ ＿＿＿＿

考え方　空間図形の問題でも 線分や角を ＿＿＿(図形)

の辺と角としてとらえる。