

公式丸暗記否定主義 ～数列編～

札幌創成高校
外山 尚生

0 はじめに

公式は数学の問題を解くために便利なものである。しかしながら、公式の成り立ちを考えずに公式の丸暗記だけで数学を勉強することはつまらない。

たくさんの公式が出てくる数列。そんな数列の公式を「成り立ち」から理解していると簡単に解ける問題を作ってみた。

1 数列を考えるための準備

【問題 1. 1】

10 本の木が横一列に並んでいる。このとき、木と木の間数は何個か？

数列の授業を行うとき、最初に出す問題である。10 個？9 個？実際に生徒に聞いてみると、意外と答えを出すことができない。そこで、実際に書いてみると間数は 9 個である。

木 木 木 木 木 木 木 木 木 木

間数は 1 個減るんだね。このことがこれから数列を勉強するときに大切になるんだよ。ということで印象付けておく。

【補題 1. 2】

n 本の木が横一列に並んでいるとき、間数は $n - 1$ 個。

この木を左から順番に番号をつけていこう。

木₁ 木₂ 木₃ 木₄ 木₅ 木₆ 木₇ 木₈ 木₉ 木₁₀

この時、左から m 番目の木（木 _{m} ）と左から n 番目の木（木 _{n} ）（ただし $m > n$ ）の間数は $m - n$ 個となる。これがこれから数列を考えるときに役に立つことであるから、命題としてまとめておきたい。

【命題 1. 3】

$m > n$ とする。

左から m 番目の木と左から n 番目の木の間数は $m - n$ 個。

2 等差数列・等比数列の一般項

一般に一定の数 d （公差）を次々と足して得られる数列を等差数列という。この数列の第 n 項の値、すなわち一般項を考えたい。

【命題 1. 2】より第 n 項の値は初項 a_1 に対して、 d を $n-1$ 回足したものであるから

$$a_n = a_1 + \underbrace{d + d + d + \cdots + d}_{n-1 \text{ 回}} = a_1 + (n-1)d$$

より等差数列の一般項が導かれる。

【公式 2. 1】（等差数列の一般項）

初項 a_1 、公差 d の等差数列の一般項は $a_n = a_1 + (n-1)d$

等差数列の一般項は初項と公差があれば求められる。次の問いを考えよう。

【問題 2. 2】

$a_5 = 14$ 、公差 $d = 3$ の等差数列の一般項を求めよ。

【公式 2. 2】を使うと次のような解答になる。

【解答 1】

$$a_n = a_1 + (n-1) \times 3 \text{ とすると、 } a_5 = a_1 + (5-1) \times 3 = 14 \text{ より } a_1 = 2$$

$$\text{従って、 } a_n = 2 + (n-1) \times 3 = 3n - 1$$

この解答を間の数に注目して、【命題 1. 3】を使うと次のような解答ができる。

【解答 2】

$$a_5 \text{ から } a_n \text{ の間数は } n-5 \text{ だから、 } a_5 \text{ に } n-5 \text{ 回 } 3 \text{ を足せばよい。}$$

$$\text{よって、 } a_n = 14 + (n-5) \times 3 = 3n - 1$$

もう少し応用して次のような問題を考えよう。

【問題 2. 3】

$a_3 = 10$ 、 $a_6 = 1$ である等差数列の一般項を求めよ。

【公式 2. 2】を使うと次のような解答になる。

【解答 1】

$$a_n = a_1 + (n-1)d \text{ とすると}$$

$$a_3 = a_1 + (3-1)d = 10 \cdots \textcircled{1}$$

$$a_6 = a_1 + (6-1)d = 1 \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}、\textcircled{2} \text{ を解くと } a_1 = 16、d = -3$$

$$\text{よって一般項は } a_n = 16 + (n-1) \times (-3) = -3n + 19$$

この解答を間の数に注目して、【命題1. 3】を使うと次のようになる。

【解答2】

a_3 から a_6 の間数は $6-3=3$ であるから、 a_3 から a_6 まで3回 d を足している。

a_3 から a_6 まで $1-10=-9$ 増加していることに注目して $3d=-9$ 。つまり $d=-3$

よって、 a_3 から a_n の間数は $n-3$ だから、 $a_n=10+(n-3)\times(-3)=-3n+19$

この間で考えたことを一般化すると次のようになる。

【公式2. 4】（等差数列の一般項②）

第 k 項が a_k で、公差 d の等差数列の一般項 $a_n = a_k + (n-k)d$

第 k 項が a_k 、第 l 項が a_l の等差数列の一般項 $a_n - a_k = \frac{a_l - a_k}{l - k}(n - k)$

この式は直線の式と似ていることに気が付く。実際に等差数列の値を座標軸にとるとこのことは感覚的に理解できる。

この考え方は等比数列の一般項にも応用できる。

【公式2. 5】（等比数列の一般項）

初項 a_1 、公比 r の等比数列の一般項 $a_n = a_1 r^{n-1}$

第 k 項が a_k で、公比 r の等比数列の一般項 $a_n = a_k r^{n-k}$

第 k 項が a_k 、第 l 項が a_l の等比数列の一般項 $a_n = a_k \times \left(\frac{a_l}{a_k}\right)^{\frac{n-k}{l-k}}$

3 等差数列の和

等差数列の和を考えるとときは1から100まで足すといくつになる？という話題から入る。ガウスのエピソードにからめて話すと面白い。

$$\begin{array}{r} S = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 100 \\ +) S = 100 + 99 + 98 + 97 + \cdots + 1 \\ \hline 2S = 101 + 101 + 101 + 101 + \cdots + 101 \end{array}$$

したがって、 $2S=101 \times 100$ より $S=5050$

足す項の順を逆にして、各辺を足すことにより求められる。

これを一般化して等差数列の和の公式が導かれる。

【公式3. 1】

初項 a_1 、末項 a_n の等差数列の初項から第 n 項までの和 $S_n = \frac{1}{2}n(a_1 + a_n)$

ここで、【公式2. 1】 $a_n = a_1 + (n-1)d$ を代入して計算することで次の式が出てくる。

【系3. 2】

初項 a_1 、公差 d の等差数列の初項から第 n 項までの和 $S_n = \frac{1}{2}n\{2a_1 + (n-1)d\}$

さて、次の問題を考えてみよう。

【問題 3. 3】

次の等差数列 $\{a_n\}$ の初項から第 100 項までの和を求めよ。

(1) $a_1 = 1$ 、 $a_{100} = 100$

(2) $a_{50} = 1$ 、 $a_{51} = 100$

(3) $a_{20} = 1$ 、 $a_{81} = 100$

(1) は等差数列の和の公式からすぐに求められる。

$$S = \frac{1}{2} \times 100 \times (1 + 100) = 5050$$

等差数列の和を求めるためには初項 a_1 と末項 a_{100} がわかればよい。

このことを意識して、一般項を求め、初項と末項を求めることで和を求めてみる。

(2) $a_{50} = 1$ 、 $a_{51} = 100$ より公差は $d = 100 - 1 = 99$

よって一般項は $a_n = 1 + 99(n - 50) = 99n - 4949$

よって $a_1 = 99 - 4949 = -4850$ $a_{100} = 4951$

したがって求める和は $S = \frac{1}{2} \times 100 \times (-4850 + 4951) = 5050$

(3) $a_{20} = 1$ 、 $a_{81} = 100$ より一般項 $a_n = 1 + \frac{100 - 1}{81 - 20}(n - 20) = \frac{99}{61}n - \frac{1919}{61}$

$a_1 = -\frac{1820}{61}$ 、 $a_{100} = \frac{7981}{61}$

したがって求める和は $S = \frac{1}{2} \times 100 \times \left(-\frac{1820}{61} + \frac{7981}{61}\right) = 5050$

このように (1) ~ (3) は同じ値になるから不思議だ。

しかし、よく考えてみると「足す項の順を逆にして、各辺を足す」を意識して考えてみると、このことは当たり前のことだと気が付くだろう。

せっくなので一般化してみた。

【定理 3. 4】

S_m を初項から第 m 項までの等差数列 $\{a_n\}$ の和とする。

$0 \leq k \leq m$ について $a_1 = a_k$ かつ $a_m = a_{m+1-k}$ が成り立つなら、 S_m の値は k の値に関わらず一定である。

4 等比数列の和

等比数列の和は「かけてずらす」を使って求めるとわかりやすい。

【例 4. 1】

$S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8 + 2^9 + 2^{10}$ の和

$$\begin{array}{r} 2S = \quad 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 + 512 + 1024 + 2048 \\ -) \quad S = \quad 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 + 512 + 1024 \\ \hline S = -1 \qquad \qquad \qquad + 2048 \\ S = 2047 \end{array}$$

ちなみに、1、2、 2^2 、 2^3 、 2^4 ...と電卓でどんどん足していくとなかなか面白いことが起こる。

値	1	2	4	8	16	32	64	128	256
和	1	3	7	15	31	63	127	255	511

これを一般化することで等比数列の和が求められる。

【公式 4. 2】

初項 a_1 、公比 r ($r \neq 1$) の等比数列の初項から第 n 項までの和

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

公式だけで覚えているだけでは、こういう問題になると、厳しくなってくる。

【問題 4. 3】

次の等比数列の和を求めよ。

$$S = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots + 2147483648$$

実は $2147483648 = 2^{31}$ であるが、そんなの知らないよというだろう。

でもかけてずらすで考えるとこの和は容易に求めることができる。

$$\begin{array}{r} 2S = 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots + 2147483648 + 4294967296 \\ -) S = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots + 2147483648 \\ \hline S = -1 + + 4294967296 \end{array}$$

$$S = 4294967295$$

5 和の記号 Σ

Σ というと、 Σ の公式に目が行きがちだが、 Σ の本当の意味は和である。

【定義 5. 1】

$$\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

Σ の公式ばかりに意識がいきがちな生徒にはこういう問題を出して、 Σ の意味を再確認させたい。

【問題 5. 2】

次の中で $\sum_{k=1}^4 (k+2)^3$ と等しいものはどれか？

(ア) $\sum_{k=3}^4 k^3$

(イ) $\sum_{k=3}^5 k^3$

(ウ) $\sum_{k=3}^6 k^3$

(エ) $\sum_{k=1}^6 k^3 - \sum_{k=1}^2 k^3$

(オ) $\sum_{k=1}^6 k^3 - \sum_{k=1}^3 k^3$

(カ) $\sum_{k=1}^6 k^3 - \sum_{k=1}^4 k^3$

$$\sum_{k=1}^4 (k+2)^3 = 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 \text{ だから等しいものは (ウ) と (エ) である。}$$

これを Σ の公式を使って計算しようとするものすごい大変だ。

ちなみに和から一般項を求める公式

【公式 5. 3】

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k \text{ とするとき}$$

$$a_1 = S_1$$

$$a_n = S_n - S_{n-1} \quad (n \geq 2 \text{ のとき})$$

この公式を理解させるためにこういう問題から入っている。

【問題5. 4】

あるクラスの出席番号1から100の合計点は7500、1番から99番の合計点は7455点だった。
出席番号100の生徒の点数をもとめよ。

出席番号 n 番の生徒の点数を a_n とすると

$$a_{100} = S_{100} - S_{99} = 7500 - 7455 = 45 \text{ 点}$$

ここから $a_n = S_n - S_{n-1}$ を理解させている。

6 階差数列

数列 $\{a_n\}$ の隣り合う2項の差 $a_{n+1} - a_n = b_n$ を項とする数列 $\{b_n\}$ を数列 $\{a_n\}$ の階差数列という。

【補題1. 2】より間数は $n-1$ 個であるから

$$n \geq 2 \text{ のとき } a_n = a_1 + b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_{n-1} = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \text{ となる。}$$

【公式6. 1】

数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると

$$n \geq 2 \text{ のとき } a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$$

そこで、こんな問題を考えてみた。

【問題6. 2】

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_5 = 21 \quad a_{n+1} - a_n = 2n$$

【公式6. 1】を使おうとすると、 a_1 を出さなければならない。 a_1 をどうやって出せばいいの? となる。

$$a_5 - a_4 = 8 \text{ より } a_4 = 21 - 8 = 13$$

$$a_4 - a_3 = 6 \text{ より } a_3 = 13 - 6 = 7$$

$$a_3 - a_2 = 4 \text{ より } a_2 = 7 - 4 = 3$$

$$a_2 - a_1 = 2 \text{ より } a_1 = 3 - 2 = 1$$

$$\text{よって } n \geq 2 \text{ のとき } a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2k = 1 + (n-1)n = n^2 - n + 1$$

初項は $a_1 = 1$ なので、この式は $n = 1$ のときも成り立つ。

$$\text{よって、} a_n = n^2 - n + 1$$

これをこのようにしても求められる。

$$b_n = 2n \text{ とする。}$$

$$n \geq 6 \text{ のとき } a_n = a_5 + b_5 + b_6 + b_7 + \cdots + b_{n-1} = 21 + \sum_{k=5}^{n-1} 2k$$

ここで $\sum_{k=5}^{n-1} 2k$ をどうしようか迷うかもしれないが、 $\sum_{k=5}^{n-1} 2k = 10 + 12 + 14 + \cdots + 2(n-1)$ の等差数列の

$$\text{和であるから } \sum_{k=5}^{n-1} 2k = \frac{(10 + 2n - 2)(n - 5)}{2} = n^2 - n - 20$$

よって $a_n = 21 + n^2 - n - 20 = n^2 - n + 1$

これは $n = 1, 2, 3, 4, 5$ の時にも成り立つ。

従って $a_n = n^2 - n + 1$

せっかくなので、これも一般化してみよう。

【定理 6. 3】

第 l 項が a_l 、 $a_{n+1} = a_n + b_n$ を満たす数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = a_l + \sum_{k=l}^{n-1} b_k = a_l + \sum_{k=1}^{n-l} b_{k+l-1}$$

7 まとめ

数列というと、「公式が多い」。「計算が複雑」。などという理由から嫌われることが多い。しかしながら数列の公式を成り立ちから見ると複雑だった数列の分野が簡単に見える。きちんと理解すると数学は簡単なんだというイメージをつけるために、数列はとてもよい分野であると思う。

公式の成り立ちの大切さに気づかせるために、数列を公式中心ではなく、丁寧に教えていきたい。